

Волны в тяжелом стратифицированном газе: Расщепление на подзадачи акустических и гравитационных волн

^{1,2,3}Кшевецкий С.П., ²Куличков С.Н., ⁴Курдяева Ю.А.,
³Гаврилов Н.М.

¹Балтийский государственный университет им. И.Канта ,
SPKshev@gmail.com,

²Институт физики атмосферы им. А.М.Обухова

³Санкт-Петербургский государственный университет

⁴ Институт Земного магнетизма и распространения радиоволн им. Н.В.
Пушкова

21 ноября 2024 г.

Введение

Исследование гидродинамических уравнений, описывающих распространение волн в стратифицированной среде, является важным направлением как современной математики, так и геофизики. Понятие стратифицированной среды подразумевает, что коэффициенты уравнений зависят только от одной из пространственных переменных, вертикальной z . Частный случай, когда плотность $\rho_0(z)$ газа убывает с высотой z строго экспоненциально, $\rho_0(z) = \rho_0(0)e^{-\frac{z}{H}}$, $H = \text{const}$, называется изотермической атмосферой. Все остальные стратификации объединяют общим термином "неизотермическая атмосфера".

Реальная атмосфера существенно неизотермическая, плотность зависит от высоты z по закону $\rho_0(z) = \rho_0(0) \frac{H(0)}{H(z)} e^{-\int_0^z \frac{dz}{H(z)}}$, и $H(z)$ изменяется с высотой на порядок.

В случае изотермической атмосферы линеаризованные гидродинамические уравнения решаются аналитически. Дисперсионное соотношение [Hines(1975), Yeh, Liu (1974)] показывает, что существуют две волновые ветви решений. Частные решения, соответствующие одной ветви, называются акустическими волнами (AWs), для частот ω_A волн этой ветви справедливо

$$\Omega_A \leq |\omega_A| < \infty, \quad (1)$$

где предельная граничная частота $\Omega_A = \sqrt{\frac{\gamma g}{4H}}$ называется частотой акустической отсечки.

Частные решения, соответствующий другой ветви, называются внутренними гравитационными волнами (IGWs), для частот ω_G волн этой ветви справедливо

$$0 < |\omega_G| \leq \Omega_B, \quad (2)$$

где $\Omega_B = \sqrt{\frac{(\gamma-1)g}{\gamma H}}$ называется частотой Вьяйсяля-Брендта.

Введение

Справедливо $\omega_G < \Omega_B < \Omega_A < \omega_A$, то есть, между предельной частотой внутренних гравитационных волн и предельной частотой акустических волн имеется окно.

Понятия AWs, IGWs применяют и к волнам в неизотермической атмосфере, но на физическом уровне строгости. В окрестности высоты z неизотермическая стратификация локально аппроксимируется изотермической, и по значению $H(z)$ вычисляются локальные значения $\Omega_B(z)$, $\Omega_A(z)$. Далее применяются неравенства (1), (2),

$$\Omega_A(z) \leq |\omega_A| < \infty, \quad 0 < |\omega_G| \leq \Omega_B(z), \quad (3)$$

в которых, однако, используются локальные значения

$$\Omega_B(z) = \sqrt{\frac{(\gamma-1)g}{\gamma H(z)}}, \quad \Omega_A(z) = \sqrt{\frac{\gamma g}{4H(z)}}.$$

Введение

Недостаток локального применения неравенств (3) в том, что одна и та же волна может попасть в класс AGWs на одних высотах и в класс IGWs на других высотах.

В [Kshevetskii et al.(2021)](математически) изучен спектр волн в атмосфере с неизотермической стратификацией, в которой $H(z)$ достигает максимума на бесконечности. Доказано, что спектр частот волн ω непрерывный, вещественный, состоит из двух неперекрывающихся полос

$$\Omega_A(\infty) \geq |\omega_1| < \infty \quad 0 < |\omega_2| \leq \Omega_B(\infty) \quad \text{и} \quad \Omega_A(\infty) > \Omega_B(\infty)$$

Значения $\Omega_A(\infty) = \sqrt{\frac{\gamma g}{4H(\infty)}}$, $\Omega_B(\infty) = \sqrt{\frac{(\gamma-1)g}{\gamma H(\infty)}}$ определяются значением $H(\infty)$ для больших высот z , и не имеют физического смысла. Поэтому, хотя структура спектра частот волн аналогична структуре спектра частот волн для изотермической стратификации, интерпретировать эти две полосы частот как частоты AWs и IGWs вряд ли разумно.

Введение

Далее рассматриваются двумерные линеаризованные гидродинамические уравнения, соответствующие общему случаю неизотермической стратификации атмосферы. Неизотермические стратификации бывают устойчивыми и неустойчивыми. Условие устойчивости стратификации далее сформулировано.

В динамике атмосферы большое значение имеют такие волны, у которых горизонтальный масштаб больше вертикального, то есть, $\beta = \frac{l_z}{l_x} \ll 1$, где l_z и l_x – характерные вертикальный и горизонтальный масштабы волн, соответственно.

Будет показано, что, по зависимости решений от параметра β , решения гидродинамических уравнений, для любой устойчивой стратификации, делятся на два непересекающихся класса.

Выделенные классы решений можно отождествлять с AWs и IGWs в случае неизотермической стратификации.

Основные уравнения и постановка задачи

Стандартная система линеаризованных гидродинамических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial \rho_0 u}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 g H (\psi + \phi)}{\partial x} &= 0, & (4) \\ \frac{\partial \rho_0 w}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 g H (\psi + \phi)}{\partial z} + \rho_0 g \psi &= 0, \\ \frac{\partial \rho_0 \phi}{\partial t} + (\gamma - 1) \left(\frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} \right) + \frac{\alpha}{H} \rho_0 w &= 0 \end{aligned}$$

Здесь t – время; x и z – горизонтальная и вертикальная координаты, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$; $\alpha = \gamma - 1 + \gamma \frac{\partial H}{\partial z}$; $H(z) = \frac{RT_0(z)}{g\mu}$ – масштаб стратификации; g – ускорение свободного падения, $T_0(z)$ – произвольное распределение температуры с высотой, но $\alpha(z) > 0$.

$$\rho_0(z) = \frac{\rho_0(z)H(0)}{H(z)} \exp\left(-\int_0^z \frac{dz}{H(z)}\right), \quad \gamma = \text{const.}$$

Плотность может изменяться скачком, но $\alpha(z) \geq 0$.

Функции $\phi(x, z, t)$, $\psi(x, z, t)$ выражаются через температуру $T(x, z, t)$ и плотность $\rho(x, z, t)$ возмущенного газа

$$T(x, z, t) = T_0(z) (1 + \phi(x, z, t)), \quad \rho(x, z, t) = \rho_0(z) (1 + \psi(x, z, t)), \quad (5)$$

$u(x, z, t)$, $w(x, z, t)$ – локальные массовые скорости атмосферного газа вдоль горизонтальной оси x и вертикальной оси z , соответственно.

Пусть $X = \begin{pmatrix} \psi \\ u \\ w \\ \phi \end{pmatrix}$. Квадратичный функционал

[Gossard, Hook(1975)]

$$E(X) = \int_{R^2} \rho_0(z) \left[\frac{u^2 + w^2}{2} + \frac{gH}{2\gamma} (\phi + \psi)^2 + \frac{gH}{2\gamma\alpha} (\phi - (\gamma - 1)\psi)^2 \right] d\Omega,$$

является интегралом волновой энергии для уравнений (4).

Конструкция $\|X\| = \sqrt{2E(X)}$ - норма.

Скалярное произведение

$$\{X_1, X_2\} = \int_{R^2} \rho_0(z) \left[u_1^* u_2 + w_1^* w_2 + \frac{gH}{\gamma} (\phi_1 + \psi_1)^* (\phi_2 + \psi_2) + \frac{gH}{\alpha\gamma} (\phi_1 - (\gamma - 1)\psi_1)^* (\phi_2 - (\gamma - 1)\psi_2) \right] d\Omega. \quad (7)$$

Дополним уравнения (4) начальными условиями:

$$X(x, z, t = 0) = X_0(x, z), \quad \|X_0\| = \sqrt{2E(X_0)} < \infty. \quad (8)$$

Будем искать решение задачи (4), (8) как параметризованный временем t элемент гильбертова пространства h , скалярное произведение в котором (7).

Theorem

1. Система уравнений (4) является операторным уравнением типа Шредингера. Решение задачи (4), (8) существует и является параметризованным временем t элементом Гильбертова пространства h .

Замечания к теореме 1

- Решение может быть негладким. Волна может иметь разрывы. Теорема дает расширение дифференциальных уравнений на негладкие функции.
- Стратификация тоже может иметь разрывы, но обязательно должно быть $\alpha(z) = \gamma - 1 + \gamma * \frac{dH}{dz} > 0$. Иначе неустойчивость, катастрофа.
- Случай $\alpha(z) = \gamma - 1 + \gamma * \frac{dH}{dz} < 0$ иногда реализуется в атмосфере, как показывают экспериментальные исследования. Это бывает в интервале высот 80 – 100км, в тонких структурах, о которых рассказывал С.Н.Куличков.
- Что делать в таких случаях? Изучать. Линейные уравнения не позволяют избежать катастрофы. Нелинейные уравнения видимо решают проблему, если уж тонкие структуры есть в природе.

В динамике атмосферы большую роль играют волны, у которых $\beta = \frac{l_z}{l_x} \ll 1$, где l_x – горизонтальный, а l_z – вертикальный масштабы волны, соответственно.

Удобно записать уравнения (4) в безразмерных переменных. Поскольку параметры изучаемых волн могут существенно различаться, используем различные безразмерные переменные. Для волн одного типа используются безразмерные переменные:

$$u_G = \sqrt{gH_0}u'_G, \quad w_G = \beta\sqrt{gH_0}w'_G, \quad \psi_G = \psi'_G, \quad \phi_G = \phi'_G, \\ t' = \beta\sqrt{\frac{g}{H_0}}t, \quad x' = \frac{x}{H_0}\beta, \quad z' = \frac{z}{H_0}.$$

где $H(z) = H_0 \eta(z)$, $H_0 = \max\{H(z)\}$. Для волн другого типа безразмерные переменные вводятся иначе

$$u_A = \beta\sqrt{gH_0}u''_A, \quad w_A = \sqrt{gH_0}w''_A, \quad \psi_A = \psi''_A, \quad \phi_A = \phi''_A, \\ t'' = \sqrt{\frac{g}{H_0}}t, \quad x'' = \frac{x}{H_0}\beta, \quad z'' = \frac{z}{H_0}.$$

Здесь новые вводимые безразмерные переменные помечены

Используя размерные переменные, упрощенную систему уравнений для волн первого типа можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}_G}{\partial t} + \gamma g H \left[\frac{\partial \rho_0 \bar{u}_G}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 \bar{w}_G}{\partial z} \right] + \alpha g \rho_0 \bar{w}_G &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \bar{u}_G}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}_G}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \bar{P}_G}{\partial z} + \rho_0 g \bar{\psi}_G = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\gamma H \frac{\partial \rho_0 \bar{u}_G}{\partial x} + \gamma H \frac{\partial \rho_0 \bar{w}_G}{\partial z} + \alpha \rho_0 \bar{w}_G \right] + \frac{\partial \rho_0 \bar{u}_G}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 \bar{w}_G}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\bar{P}_G = \rho_0 g H (\bar{\psi}_G + \bar{\phi}_G) = P_0 (\bar{\psi}_G + \bar{\phi}_G)$ — волновая добавка к фоновому давлению $P_0(z) = \rho_0(z)gH(z)$. Черточки над символам помещены чтобы напоминать о различии между точными решениями уравнений (4) и приближенными решениями, получаемыми из (11).

Обозначим $\bar{\lambda}_G(x, z, t) = \begin{pmatrix} \bar{P}_G(x, z, t) \\ \bar{u}_G(x, z, t) \end{pmatrix}$.

Интеграл энергии для (11) имеет вид

$$E_G(\lambda_G) = \frac{1}{2} \int_{R^2} \rho_0(z) \left[\bar{u}_G^2 + \frac{\bar{P}_G^2}{\gamma g H \rho_0(z)} + \frac{(\bar{P}_G + \gamma H(z) \partial \bar{P}_G / \partial z)^2}{\gamma \alpha \rho_0(z) g H} \right] d\Omega \quad (12)$$

Дополним уравнения (11) начальными условиями, соответствующими протяженному вдоль оси Ox начальному возмущению. Пусть функции $\bar{P}_0(x, z)$, $\bar{u}_0(x, z)$ описывают некоторое начальное возмущение, имеющее конечную энергию:

$$E_G(\lambda_{G,0}) < \infty, \text{ где } \lambda_{G,0} = \begin{pmatrix} \bar{P}_0(x, z) \\ \bar{u}_0(x, z) \end{pmatrix}. \text{ При этом, пусть}$$

функции $\bar{P}_0(x, z)$, $\bar{u}_0(x, z)$ таковы, что их типичные пространственные масштабы l_{0x} , l_{0z} (где $l_{0z} \lesssim H$) вдоль осей ox и oz совпадают: $\frac{l_{0z}}{l_{0x}} = O(1)$. Тогда начальные условия, соответствующие требованию $\beta \ll 1$, можно выразить через функции $\bar{P}_0(x, z)$, $\bar{u}_0(x, z)$ следующим образом:

$$\bar{P}_G(x, z, t=0) = \sqrt{\beta} \bar{P}_0(\beta x, z), \quad \bar{u}_G(x, z, t=0) = \sqrt{\beta} \bar{u}_0(\beta x, z).$$

Theorem

2. Пусть $\bar{X}_G(x, z, t, \beta) = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_G \\ \bar{u}_G \\ \bar{w}_G \\ \bar{\phi}_G \end{pmatrix}$ решение задачи (11), (13),

(14) и пусть $X_G(x, z, t, \beta)$ решение уравнений (4) для начальных условий $X_G(x, z, t = 0, \beta) = \bar{X}_G(x, z, t = 0, \beta)$. Пусть начальные условия (13) квазистатической задачи (11), (14) удовлетворяют условию $E_G(\bar{\lambda}_G(x, z, 0)) < \infty$ и соотношениям

$$E_G\left(\frac{\partial \bar{\lambda}_G(x, z, 0)}{\partial x}\right) < \infty, \quad E_G\left(\frac{\partial^2 \bar{\lambda}_G(x, z, 0)}{\partial x^2}\right) < \infty. \quad (15)$$

Тогда решения обеих задач (полной и усеченной) существуют, и для любого $t \leq t_0 < \infty$ асимптотически совпадают, то есть $\lim_{\beta \rightarrow 0} \|\bar{X}_G(x, z, t, \beta) - X_G(x, z, t, 0)\| = 0$.

Грубо и просто, смысл теоремы 2 в следующем. Упрощенная система уравнений дает приближенные решения полной системы уравнений. Все решения, о которых идет речь, существуют в случае устойчивой стратификации.

В размерных переменных замкнутая система уравнений для волн второго типа выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{f}_A}{\partial t} + \rho_0 \bar{w}_A = 0, \quad \frac{\partial \bar{f}_A}{\partial z} - \rho_0 \bar{\psi}_A = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \rho_0 \bar{w}_A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[g \alpha \left(\bar{f}_A + \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_A}{\partial z} \right) + g \bar{f}_A \right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \rho_0 \bar{u}_A}{\partial z} - \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \rho_0 \bar{w}_A}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha} \rho_0 \bar{u}_A \right) - \frac{\partial \rho_0 \bar{w}_A}{\partial x} = 0,$$

где $\bar{f}_A = \frac{H}{\alpha} \rho_0 [\bar{\phi}_A - (\gamma - 1) \bar{\psi}_A]$. Черточки над буквами помещены для того, чтобы не путать точные решения уравнений (4) с приближенными, получаемыми из (16).

Обозначим $\bar{\lambda}_A(x, z, t) = \begin{pmatrix} \bar{f}_A(x, z, t) \\ \bar{w}_A(x, z, t) \end{pmatrix}$. Функционал энергии для (16) имеет вид

$$E_A(\bar{\lambda}_A) = \frac{1}{2} \int_{R^2} \left[\rho_0 \bar{w}_A^2 + \frac{\bar{f}_A^2}{\rho_0 \gamma H} \alpha g + \frac{g \alpha^2}{\rho_0 \gamma H} \left(\bar{f}_A + \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_A}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega <$$

Пусть функции $\bar{f}_0(x, z)$, $\bar{w}_0(x, z)$ описывают некоторое начальное возмущение с конечной энергией: $E(\bar{\lambda}_{A,0}) < \infty$, где

$$\bar{\lambda}_{A,0} = \begin{pmatrix} \bar{f}_0(x, z) \\ \bar{w}_0(x, z) \end{pmatrix}, \text{ и пусть } \frac{l_{0z}}{l_{0x}} = O(1), \quad \text{где } l_{0x}, l_{0z} -$$

характерные пространственные масштабы вдоль осей x, z для функций $\bar{f}_0(x, z)$, $\bar{w}_0(x, z)$, соответственно. Начальные условия для (16), соответствующие требованию $\beta \ll 1$, можно записать через функции $\bar{f}_0(x, z)$, $\bar{w}(x, z)$ следующим образом:

$$\bar{f}_A(x, z, t = 0) = \sqrt{\beta} \bar{f}_0(\beta x, z), \quad \bar{w}_A(x, z, t = 0) = \sqrt{\beta} \bar{w}_0(\beta x, z). \quad (18)$$

Для единственности решения четвертого уравнения системы (16) добавим требования:

$$\int_{R^2} \rho_0 \bar{u}_A^2 d\Omega < \infty, \quad \int_{R^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \rho_0 \bar{u}_A \right)^2 \frac{1}{\rho_0} d\Omega < \infty. \quad (19)$$

Theorem

3. Пусть $\bar{X}_A(x, z, t, \beta) = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_A \\ \bar{u}_A \\ \bar{w}_A \\ \bar{\phi}_A \end{pmatrix}$ – решение задачи (16), (19)

для начальных условий (18), и $X_A(x, z, t, \beta)$ решение уравнений (4) для $X_A(x, z, t = 0, \beta) = \bar{X}_A(x, z, t = 0, \beta)$. Пусть начальные условия (18) удовлетворяют условию $E_A(\bar{\lambda}_A(x, z, 0)) < \infty$, где

$\bar{\lambda}_A(x, z, 0) = \begin{pmatrix} \bar{f}_A(x, z, 0) \\ \bar{w}_A(x, z, 0) \end{pmatrix}$, и соотношениям

$$E_A\left(\frac{\partial \bar{\lambda}_A(x, z, 0)}{\partial x}\right) < \infty, \quad E_A\left(\frac{\partial^2 \bar{\lambda}_A(x, z, 0)}{\partial x^2}\right) < \infty \quad (20)$$

Тогда решения обеих, усеченной и общей задач, существуют, и на конечных временах асимптотически совпадают, т.е.

$$\|\bar{X}_A(x, z, t, \beta) - X_A(x, z, t, \beta)\| \rightarrow 0 \text{ при } \beta \rightarrow 0, \\ 0 < t < t_0 < \infty.$$

Грубо и просто, смысл теоремы 3 в следующем. Другая предложенная упрощенная система уравнений дает качественно другие приближенные решения полной системы уравнений. Все решения, о которых идет речь, существуют в случае устойчивой стратификации.

В динамике атмосферы большую роль играют длинные вдоль горизонтали волны, у которых $\beta = \frac{l_z}{l_x} \ll 1$.

Частные решения системы уравнений (4), которые при $\beta \rightarrow 0$ асимптотически удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \rho_0 g \psi = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\gamma H \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \gamma H \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} + \alpha \rho_0 w \right] + \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} = 0,$$

можно ассоциировать с внутренними гравитационными волнами.

Частные решения системы уравнений (4), которые при $\beta \rightarrow 0$ асимптотически удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \rho_0 \psi = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \rho_0 u}{\partial z} - \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \rho_0 w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha} \rho_0 u \right) - \frac{\partial \rho_0 w}{\partial x} = 0,$$

можно ассоциировать с акустическими волнами.

В случае бесконечной атмосферы множество решений

Theorem

4. Пусть начальные условия

$$X(x, z, t = 0) = \sqrt{\beta} X_0(\beta x, z)$$

для системы (4) удовлетворяют следующим ограничениям:

$$X_0(x, z) \in h, \quad \frac{\partial}{\partial x} X_0(x, z) \in h, \quad \frac{\partial}{\partial z} X_0(x, z) \in h, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} X_0(x, z) \in h.$$

Тогда при $t \leq t_0 < \infty$ решение $X(x, z, t, \beta)$ задачи (4) можно асимптотически представить в виде суммы

$$X(x, z, t, \beta) \rightarrow \bar{X}_A(x, z, t, \beta) + \bar{X}_G(x, z, t, \beta) \quad \text{при} \quad \beta \rightarrow 0$$

решений усеченных уравнений (11), (16). Решения всех выписанных задач существуют. Начальные условия для (11), (16) могут быть получены решением замкнутой системы уравнений (21), (22), (23).

Дополнительное условие

$$X(x, z, t = 0, \beta) = \overline{X}_A(x, z, t = 0, \beta) + \overline{X}_G(x, z, t = 0, \beta) \quad (23)$$

Грубо и просто, смысл теоремы 4 в следующем. Никаких других типов/классов решений, кроме двух указанных, ни при какой стратификации, не существует. Поэтому один класс решений разумно считать гравитационными волнами, а другой класс решений - акустическими.

Определения и теоремы применимы к любой устойчивой стратификации в атмосфере.

Распределение энергии по типам волн

Пусть E — энергия начального возмущения, и E_A , E_G — энергии акустической и гравитационной волн.

Соотношения (21), (22) можно использовать для оценки энергий E_A , E_G . Рассмотрим случай

$$u(x, z, t = 0) = w(x, z, t = 0) = \psi(x, z, t = 0) \equiv 0, \\ \phi(x, z, 0) = \phi_0(x, z). \quad (24)$$

Пусть атмосфера изотермическая, $H = \text{const}$. Решение уравнений (21), (22), (23) дает начальные условия для акустических и гравитационных волн:

$$u_A(x, z, 0) = u_G(x, z, 0) = w_A(x, z, 0) = w_G(x, z, 0) = 0, \quad (25) \\ \phi_A(x, z, 0) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \phi_0(x, z), \quad \phi_G(x, z, 0) = \frac{1}{\gamma} \phi_0(x, z), \\ \psi_A(x, z, 0) = -\psi_G(x, z, 0) = \left(\phi_0(x, z) - \int^z \phi_0(x, z) dz \frac{1}{H} \right).$$

Для энергий E_A , E_G получаем формулы:

$$E_{A,G} = gH \int_{R^2} \rho_0(z) \left(\frac{\phi_{A,G}^2}{\gamma - 1} + \psi_{A,G}^2 \right) d\Omega \quad (26)$$

Нет необходимости вычислять интегралы в (26), поскольку можно воспользоваться дополнительной формулой

$$E = E_A + E_G = gH \int_{R^2} \rho_0(z) \phi_0^2(x, z) d\Omega \quad (27)$$

В результате совместного рассмотрения формул (25), (26), (27) получаем:

$$E_A = \frac{\gamma - 1}{\gamma} E, \quad E_G = \frac{E}{\gamma}, \quad \frac{E_A}{E_G} = \gamma - 1 \quad (28)$$

Формулы применимы и к трехмерному случаю.

В случае, когда $\psi(x, z, 0) \neq 0$, но все другие компоненты начального условия равны нулю: $\frac{E_A}{E_G} = (\gamma - 1)^{-1}$.

Простое следствие

Невозможно с помощью нагрева атмосферного газа создать только акустическую волну или только гравитационную волну. Это волны всегда возникаают только в паре. Если нагрев был быстрым, то энергия акустических волн всегда примерно вдвое меньше энергии гравитационных волн.

Необычные свойства акустических и гравитационных волн

Горизонтальная компонента групповой скорости для большинства ВГВ значительно больше вертикальной, и ВГВ распространяются почти горизонтально [Gossard, Hook(1975)], [Dikiy (1969)]. Тем не менее, сейчас покажем, что ВГВ и АВ могут возникать во всей толще атмосферы выше начального возмущения практически мгновенно. И, конечно, в паре.

Необычные свойства волн

Предположим, задано начальное температурное возмущение (24). На Рис. 1 для примера изображена зависимость начального возмущения поля температуры от высоты для случая, когда тепловой источник задан гауссовой функцией с максимумом на высоте 10 км, и имеет полуширину 4 км.

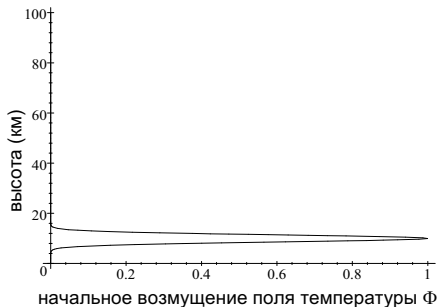


Рис.: Вертикальный профиль $\phi(x, z, 0)$

Необычные свойства волн

Формулы (25) дают начальные условия для АВ и ВГВ. Амплитуда возмущения температуры для АВ равна $\frac{1}{3}$ от амплитуды температурного возмущения, а амплитуда возмущения температуры для ВГВ равна $\frac{2}{3}$ от амплитуды температурного возмущения. У ВГВ и АВ начальные возмущения плотности отличны от нуля, несмотря на то, что начальное возмущение плотности отсутствует (Рис. 2, Рис. 3).

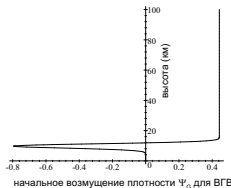
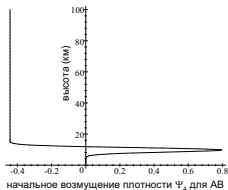


Рис.: Вертикальный профиль возмущения плотности

$$\psi_A(x=0, z, t=0)$$

Рис.: Вертикальный профиль возмущения плотности

$$\psi_G(x=0, z, t=0)$$

Необычные свойства волн

Рис. 3 показывает, что внутренние гравитационные и акустические волны при $t > 0$ возникли сразу на всех высотах выше начального возмущения.

Общая волна равна сумме акустической и гравитационной волн и сумма возмущений плотности, акустической и гравитационной волн, при $t = 0$ равна нулю. То есть, при $t = 0$ возмущения плотности, производимые гравитационной и акустическими волнами полностью компенсируют друг друга, и результирующее, суммарное возмущение плотности отсутствует. При $t > 0$ эта взаимная компенсация волн нарушается, главным образом за счет распространения более быстрых, акустических волн. Поэтому можно обнаружить гравитационные волны на тех высотах, на которые они не могли бы проникнуть за столь малое время за счет вертикального распространения. Получается эффект, будто гравитационные волны распространяются вверх со скоростью звука.

Заключение. Результаты.

Выполнен математический анализ линеаризованных гидродинамических уравнений для газа в поле тяжести, в общем случае любой неизотермической атмосферы. А именно:

- Система гидродинамических уравнений переформулирована как одно операторное уравнение типа Шредингера, откуда следует существование решения задачи о распространении волн, для любой стратификации с $\alpha(z) = \gamma - 1 + \gamma \frac{dH(z)}{dz} > 0$ для всех z .
- Решение может быть негладким, и даже волны с разрывами допускаются.
- Стратификации с разрывами тоже допускаются, но обязательно $\alpha(z) = \gamma - 1 + \gamma \frac{dH(z)}{dz} > 0$ для всех z .
- Если на каких-то высотах $\alpha(z) = \gamma - 1 + \gamma \frac{dH(z)}{dz} < 0$, то уравнения для такой стратификации неустойчивы. Решение не существует. В рамках линейной теории проблема не решается. Катастрофа.

- Реально, в атмосфере, в тонких слоях, наблюдаются случаи, когда $\alpha(z) = \gamma - 1 + \gamma \frac{dH(z)}{dz} < 0$. (Доклад Куличкова С.Н.) Наверное, для нелинейных уравнений как-то проблема неустойчивости-устойчивости решается, если уж такие стратификации экспериментально наблюдаются. Это острый, актуальный вопрос. Очень необычный.
- Показано, что в случае устойчивой стратификации ($\alpha(z) = \gamma - 1 + \gamma \frac{dH(z)}{dz} > 0$) система уравнений имеет два типа решений, различающиеся функциональной зависимостью от горизонтального масштаба возмущения. Эти два типа решений ассоциированы с АВ и ВГВ
- Произведено асимптотическое, при $\beta = \frac{l_z}{l_x} \rightarrow 0$, расщепление общей задачи о распространении волн на подзадачи о распространении АВ и ВГВ. Для произвольной устойчивой стратификации.

Заключение. Результаты.

- Для случаев начального температурного возмущения и начального возмущения плотности выведены явные формулы для отношения $\frac{E_A}{E_G}$ энергий АВ и ВГВ. Показано, что $\frac{E_A}{E_G}$ в этих случаях не зависит от формы начального возмущения и определяется адиабатической постоянной газа γ .
- Тепловые источники всегда создают АВ и ВГВ только в паре. Невозможно сгенерировать только одну из них.
- Продемонстрированы необычные свойства АВ и ВГВ. Эти волны могут возникать во всей толще атмосферы выше источника мгновенно. Но взаимно компенсируют друг друга первое время.

Статья опубликована в "Акустическом журнале", 2024.

Исследование поддержано грантом СПбГУ.

Большое спасибо за внимание!

-  Hines, C.O. Atmospheric gravity waves. *In Thermospheric circulation*; Mir Press: Moscow. 1975.
-  Yeh, K.C. and Liu, C.H. Acoustic-Gravity Waves in the Upper Atmosphere. *Reviews of Geophysics and Space Physics*. **1974**, 12, 193-216.
-  Grigoriev, G.I. Acoustic-gravity waves in the earth's atmosphere (Review). *Radiophysics and Quantum Electronics*, **1999**, 42(1), 1-21 .
-  Kshevetskii, S.P.; Kurdyueva, Y.A.; Gavrilov, N.M. Spectra of Acoustic-Gravity Waves in the Atmosphere with a Quasi-Isothermal Upper Layer. *Atmosphere* **2021**, 12 , 818.
-  Marcuk G.I. *Numerical methods in weather forecasting*. Gidrometeoizdat: Leningrad, USSR, 1967; 356 p. (in Russian)
-  Gossard, E.E.; Hooke, W.H. *Waves in the Atmosphere*, Elsevier Scientific Publishing Company, New York, 1975; 456 pp.



Richmond, A.D.; Matsushita, S. Thermospheric response to a