



Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау
Российской академии наук



МЕТОДЫ АНАЛИЗА ДВУМЕРНЫХ И КВАЗИ-ДВУМЕРНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ КОЛМОГОРОВСКОГО ТИПА

Гузев М.А.¹, Долуденко А.Н.², Ермаков А.Д.³, Посудневская А.О.^{3,4}, Фортова С.В.⁴

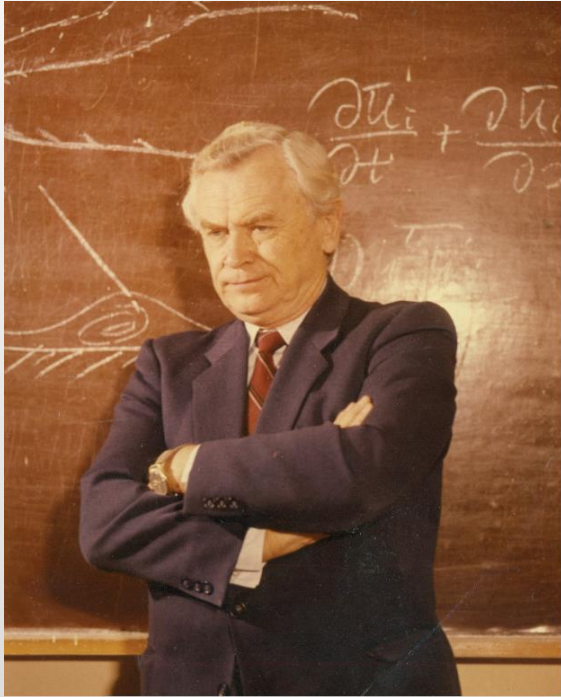
¹ *Институт прикладной математики ДВО РАН*

² *Объединенный институт высоких температур РАН*

³ *Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН*

⁴ *Институт Автоматизации проектирования РАН*

V Всероссийская конференция с международным участием
ТУРБУЛЕНТНОСТЬ, ДИНАМИКА АТМОСФЕРЫ И КЛИМАТА,
Посвящается памяти академика А.М. Обухова.



Основатель ИАП РАН-

академик Олег Михайлович Белоцерковский

(РЕКТОР ФИХТЕХА-25 лет, ДИРЕКТОР ИАП РАН-25 лет).

Отдел численных методов и турбулентности

численное моделирование задач гидродинамических неустойчивостей и турбулентности.



Цель исследований:

Изучение фундаментальных аспектов физических явлений.

1. АНАЛИЗ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ КОЛОМОГОВОРА.
2. АНАЛИЗ КВАЗИ- ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ.

ЗАДАЧА КОЛМОГОРОВА



Андрей Николаевич Колмогоров



Александр Михайлович Обухов

Течение Колмогорова -
двумерное движение
жидкости под
действием
периодической в
пространстве силы



ЗАГАДКИ АТМОСФЕРНЫХ ВИХРЕЙ

<https://youtu.be/90Usezl846g?si=D5WdttZQloftzdU7>

А. Н. Колмогоров предложил рассмотреть решение системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u + \gamma \sin y, \\ \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \text{накачка}$$

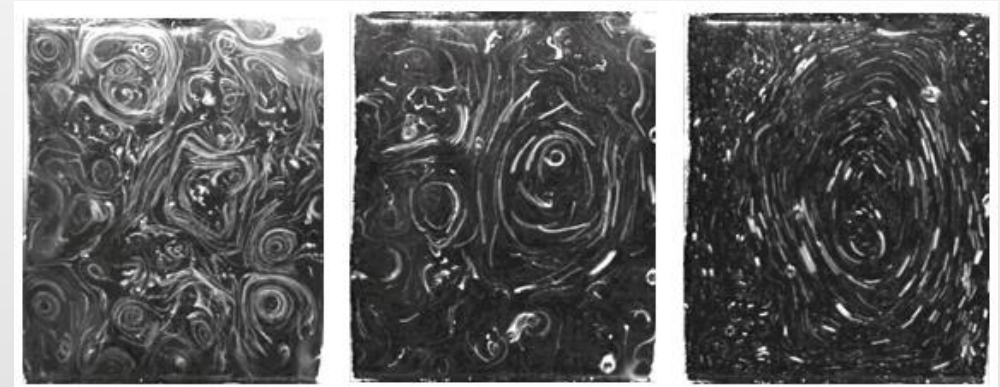
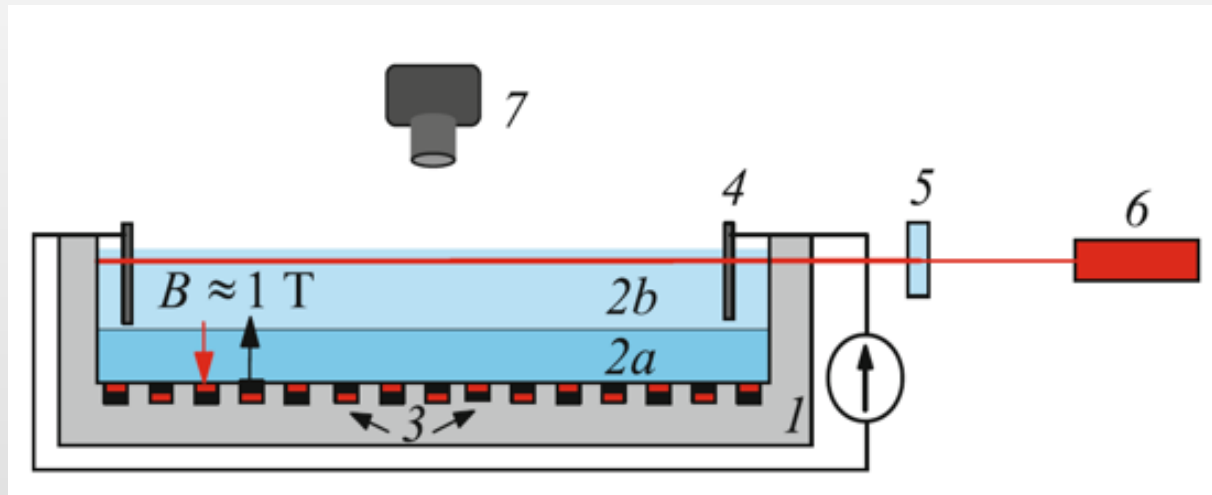
Ф. В. Должанский [8], [9] показал, что для более точного описания движения тонких слоев в жидкости, вызываемых внешним периодическим силовым полем, следует пользоваться модифицированной моделью Колмогорова, в которой учитывается также и «внешнее» трение (трение о дно кюветы).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u - \lambda u - \gamma \sin py, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v - \lambda v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{накачка} \\ \text{трение} \end{array}$$

Арнольд В.И., Мешалкин Л.Д. Семинар А.Н. Колмогорова по избранным вопросам анализа (1958-1959) // УМН. – 1960, том 15, № 1, с. 247-250.

Обухов А.М., Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование // УМН. – 1983, том 38(4), с. 101-111.

ЛАБОРАТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО МОДЕЛИРОВАНИЮ ОБРАТНОГО КАСКАДА



Эксперимент показывает наличие ламинарного, турбулентного и вихревого режимов.

- 1. ячейка из акрила
- 2.a непроводящая жидкость
- 2.b проводящая жидкость
- 3. система магнитов

- 4. электроды
- 5. цилиндрическая линза
- 6. лазер
- 7. видеокамера

ПОЛУЧИТЬ РАЗЛИЧНЫЕ РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ:

**ЛАМИНАРНЫЙ
ХАОТИЧЕСКИЙ
ВИХРЕВОЙ**

В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ.

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ. УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА С ТРЕНИЕМ О ДНО И НАКАЧКОЙ

Модель соответствует постановке А.Н. Колмогорова и эксперименту А.М. Обухова.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \overset{\text{накачка}}{\rho G \sin ky} + \mu \Delta u - \overset{\text{трение}}{\zeta u},$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho G \sin kx + \mu \Delta v - \zeta v,$$

$$\mathbf{V} = (u, v)^T.$$

$$dp = c^2 \rho_0 \frac{d\rho}{\rho}$$

Начальные условия:

$$\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$$

$$p = 10^5 \text{ Па}$$

$$k = 5 \text{ 1/м}$$

$$u(t=0) = 0$$

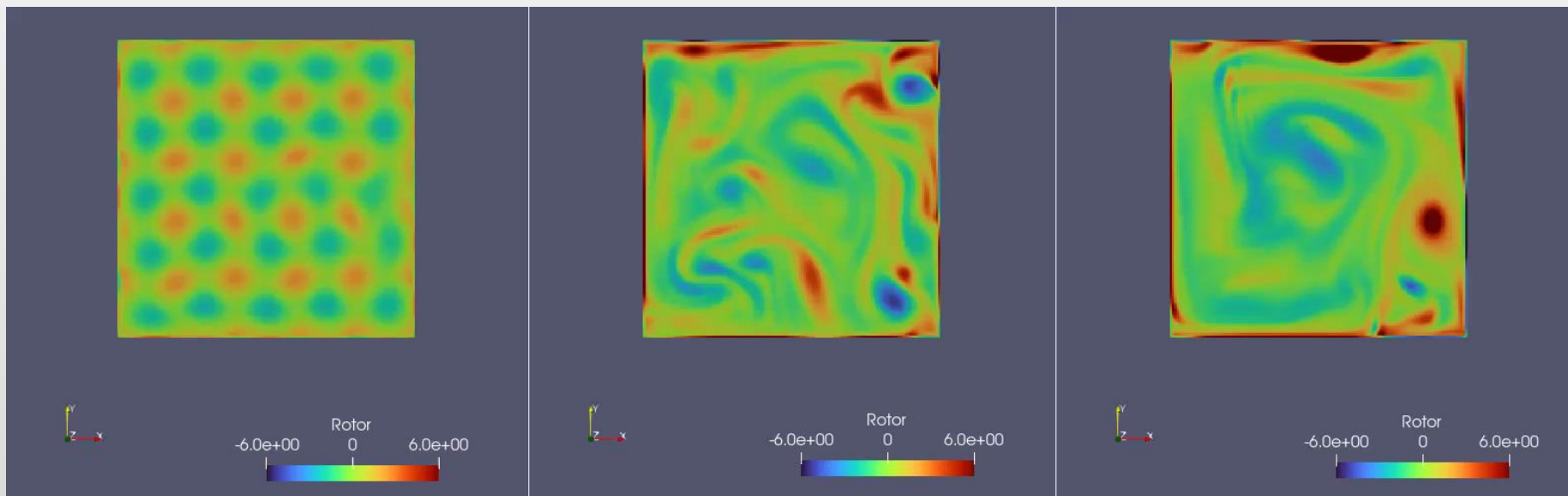
$$v(t=0) = 0$$

Граничные условия:

прилипание

Численный метод Мак-Кормака, вычислительные сетки до $20 * 10^6$ ячеек

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ
Распределение поля завихренности



Ламинарный
режим,
 $\alpha = 0,3$;
 $G = 0,05$

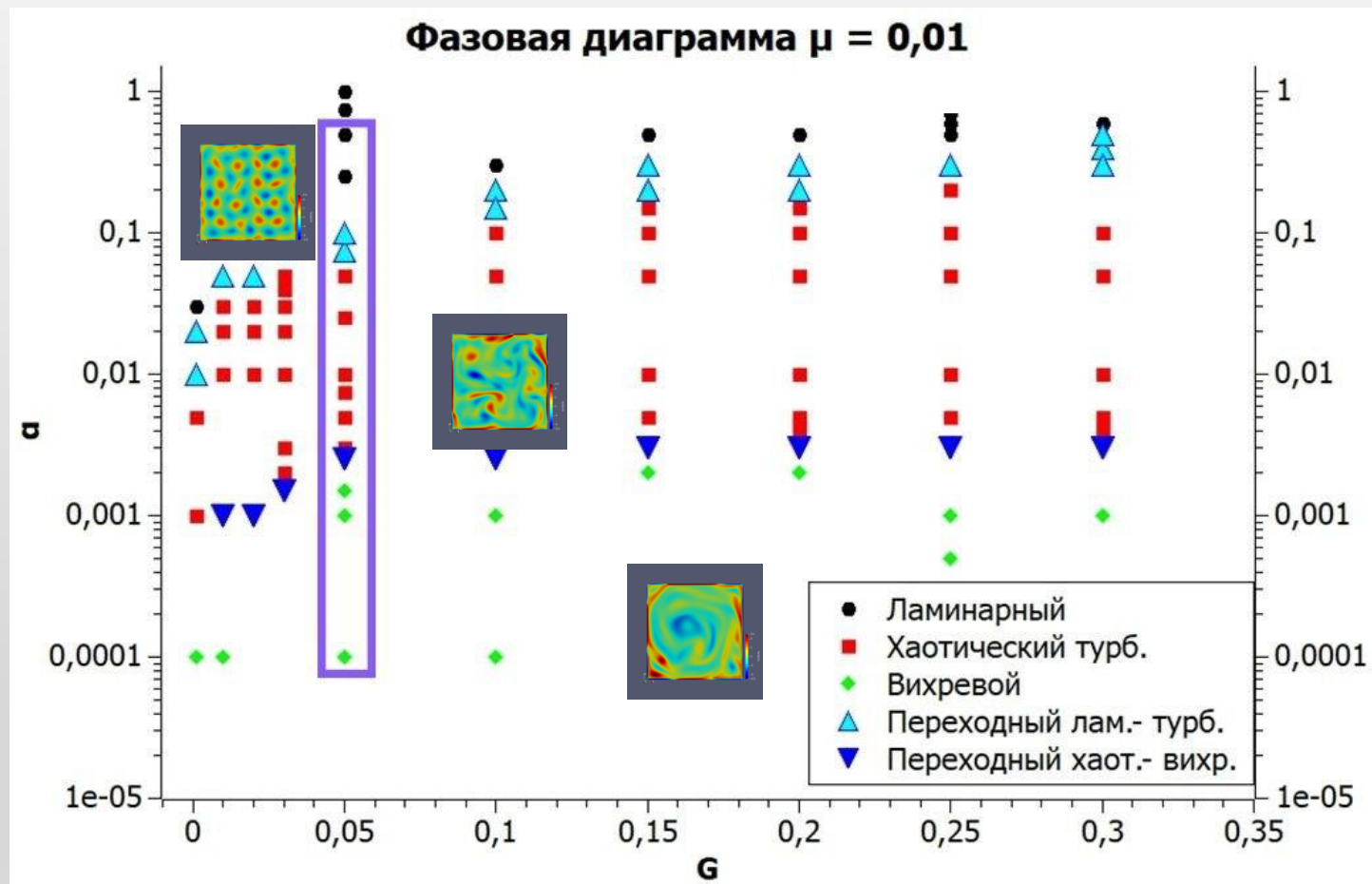
Хаотический
режим,
 $\alpha = 0,01$;
 $G = 0,05$

Вихревой
режим,
 $\alpha = 0,005$;
 $G = 0,05$

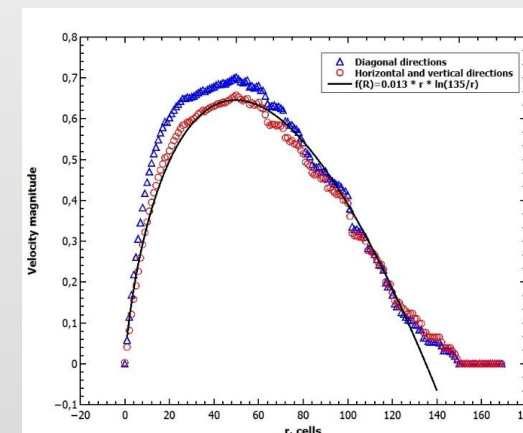
$$\alpha = \frac{\zeta}{\rho}$$

КОЭФФИЦИЕНТ ДОННОГО ТРЕНИЯ

ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОСТИ «СИЛА НАКАЧКИ- ТРЕНИЕ О ДНО»



$$Re \approx 10 \dots 10^4$$



Профиль вихря.

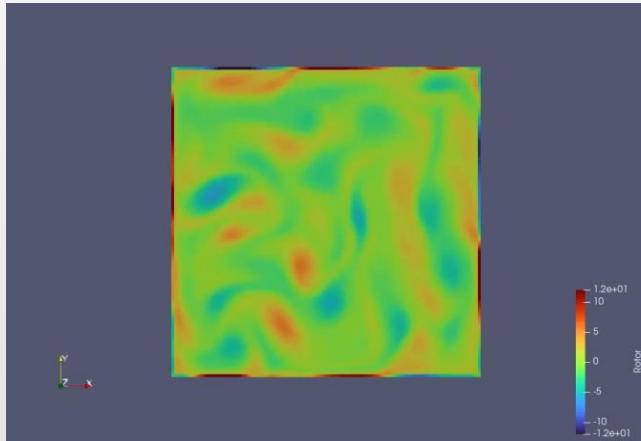
Doludenko A.N., Fortova, S.V., Kolokolov, I.V., Lebedev, V.V. Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction // Physics of Fluids 2021 Vol. 33 011704

ЗАДАЧА: ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТИПА ТЕЧЕНИЯ ПО ПОЛЮ СКОРОСТИ (ОБРАБОТКА ПОЛЯ СКОРОСТИ)

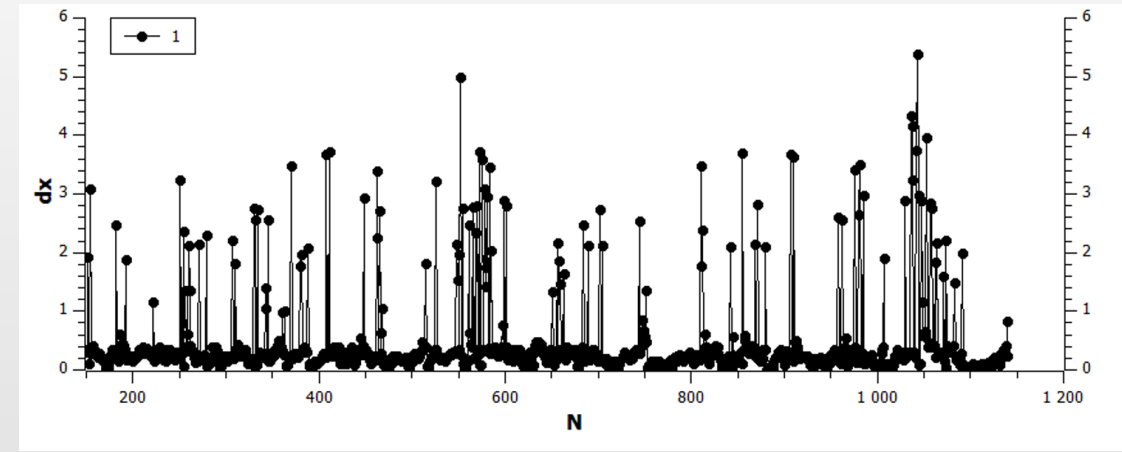
- **Визуальный**
- **Положение минимальной и максимальной завихренности**
- **Распределение Фурье-компонент разложения поля скорости**

- **Ранговое распределение величины завихренности**
- **Ранговое распределение частоты встречаемости величины завихренности**

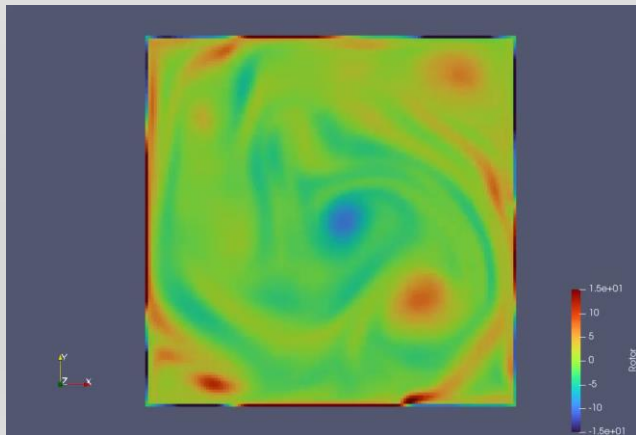
ПОЛОЖЕНИЕ ТОЧКИ С МИНИМАЛЬНОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ



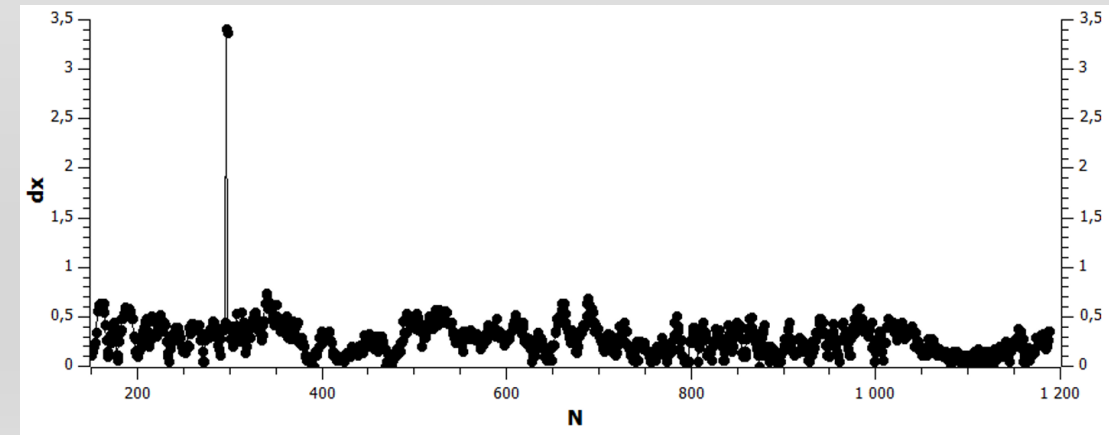
Хаотический режим



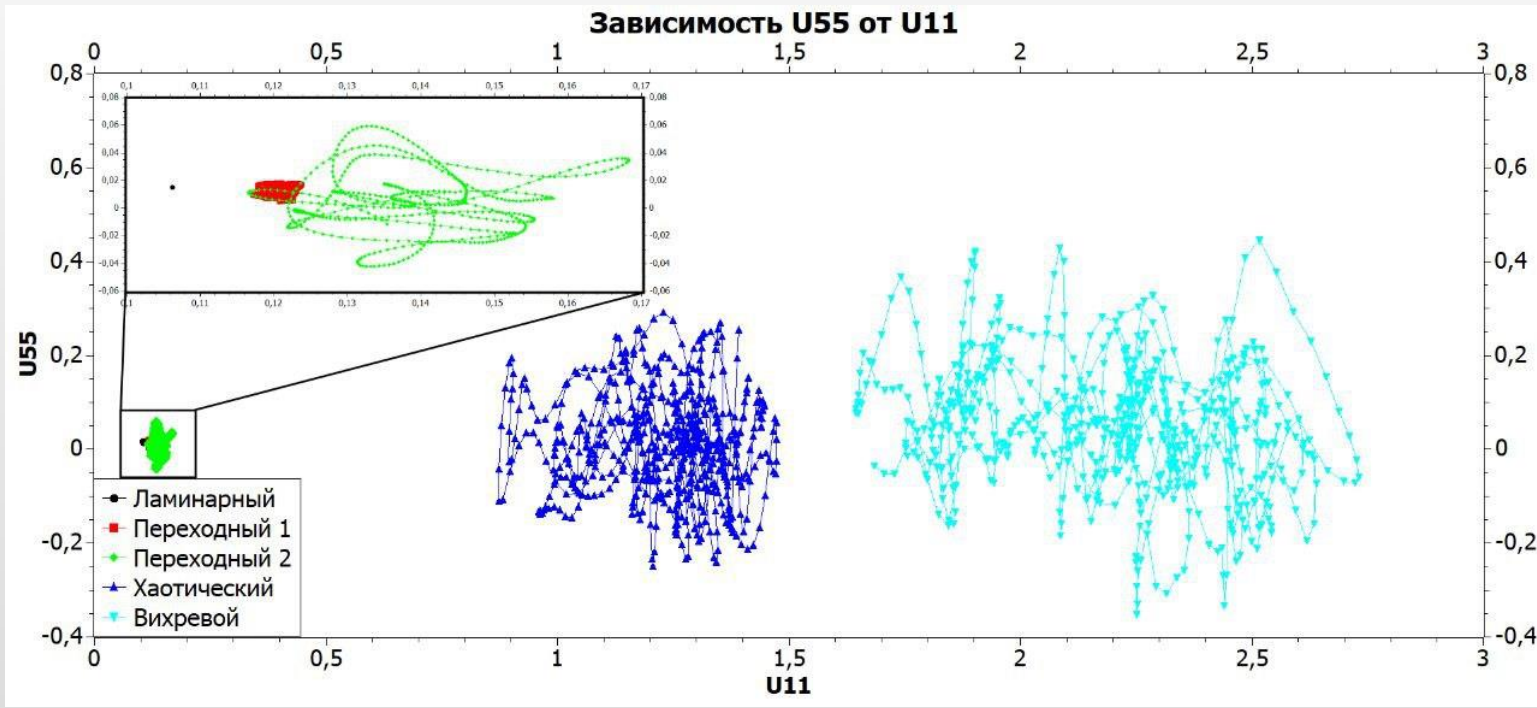
dx - расстояние между минимумами завихренности в соседние моменты времени,
 N -итерация по времени



Вихревой режим



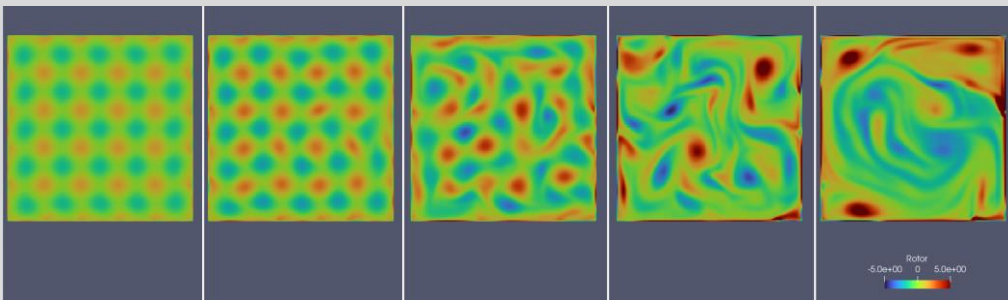
АНАЛИЗ ФУРЬЕ- КОМПОНЕНТ РАЗЛОЖЕНИЯ СКОРОСТИ



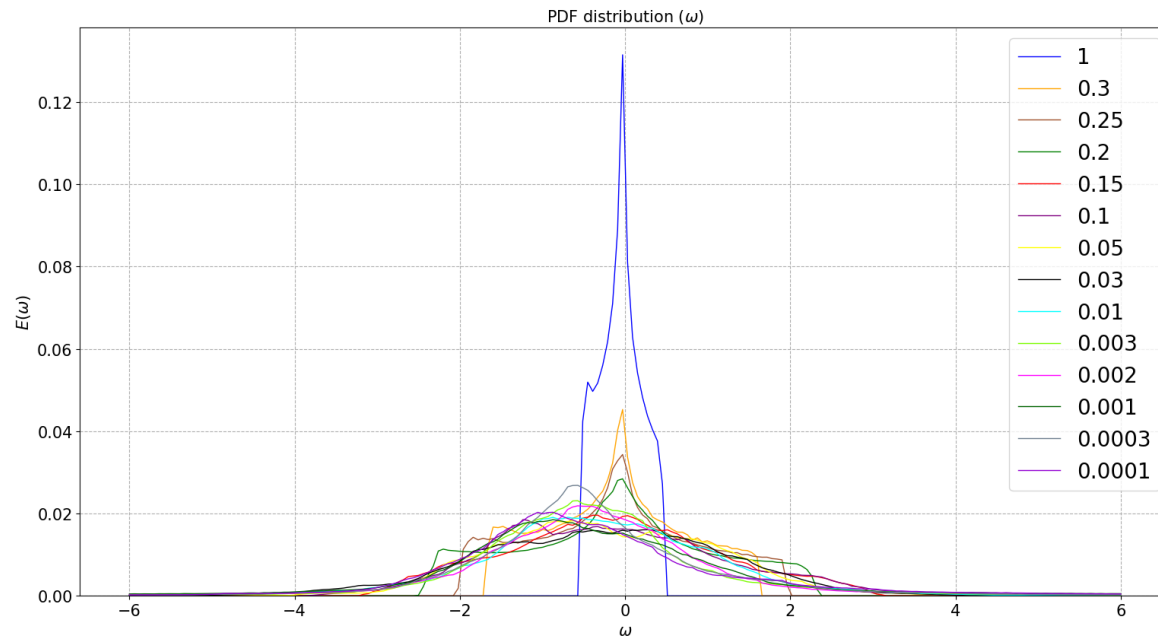
ПЛОСКОСТЬ ФУРЬЕ- КОМПОНЕНТ (U_{11}, U_{55})

- U_{55} – компонента Фурье-разложения скорости, соответствующая масштабу накачки
- U_{11} - компонента Фурье-разложения скорости, соответствующая масштабу расчетной области

Для различных режимов течения за время проведения вычислительного эксперимента области локализации коэффициентов Фурье на масштабе ячейки и на масштабе накачки являются различными.



PDF- распределение

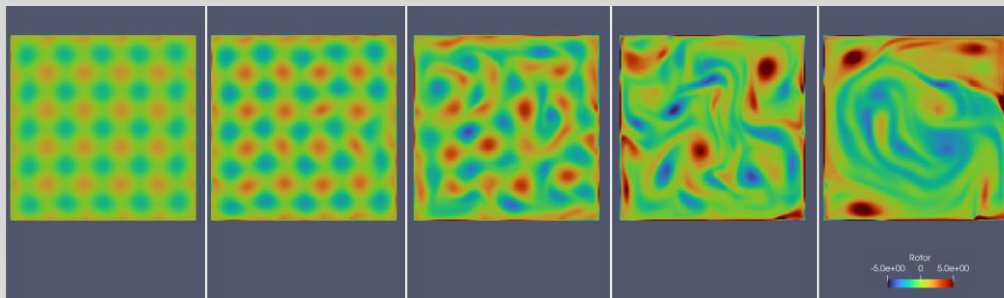


$E(\omega)$ — частота встречаемости
завихренности,
 ω — завихренность.

Стандартный подход- построение **PDF-
распределения для завихренности.**

Выполнен предварительный анализ:

**PDF- распределение не содержит
существенных различий для разных
режимов.**



***ИСПОЛЬЗУЕМ ОБРАБОТКУ
ИНФОРМАЦИИ, ОСНОВЫВАЯСЬ НА
ИДЕЯХ В.П. МАСЛОВА***

Идея В.П. Маслова: рассмотреть ЧАСТОТУ ПОВТОРЯЕМОСТИ
в качестве наблюдаемой величины.

В нашей задаче исследуется не величина завихренности, а СКОЛЬКО ЗНАЧЕНИЙ
(частота встречаемости) ЗАВИХРЕННОСТИ находится в том или ином
ИНТЕРВАЛЕ(РАНГЕ) ВЕЛИЧИН ЗАВИХРЕННОСТИ.

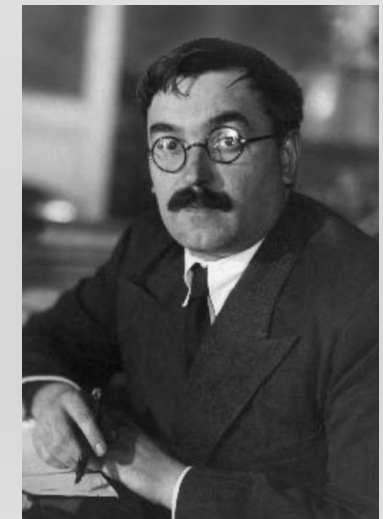
АНАЛОГИЧНЫЙ ПОДХОД:

Идея В.А. Фока: перейти от динамических переменных частицы(координата, импульс)
к изучению по распределению энергии (АНАЛОГ ЧАСТОТЫ ПОВТОРЯЕМОСТИ),
для которого были введены числа заполнения(построение ПРОСТРАНСТВА ФОКА)

¹ Впервые опубликовано в 1932 г. V. Fock. Konfigurationsraum und zweite Quantelung. Zs. f. Phys., 75, 622—647 (1932).



Виктор Павлович Маслов

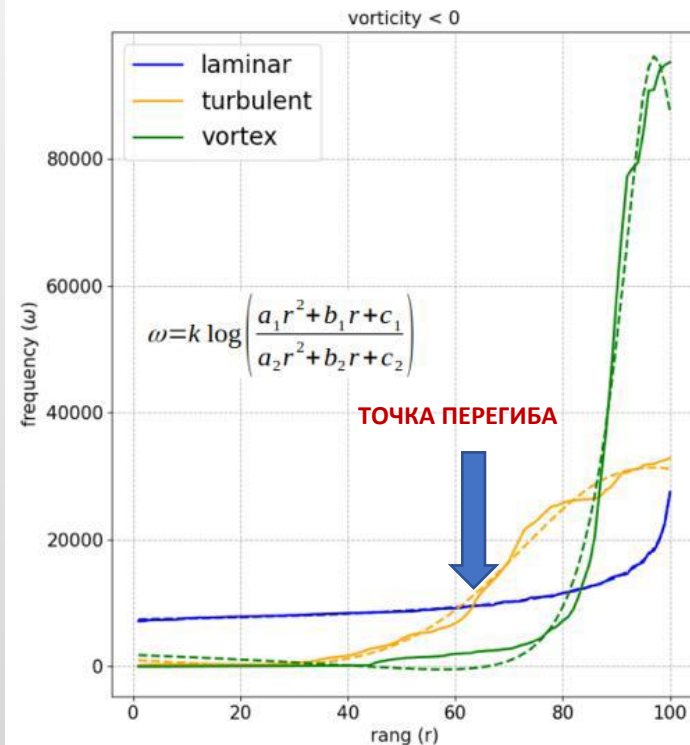


Владимир Александрович Фок

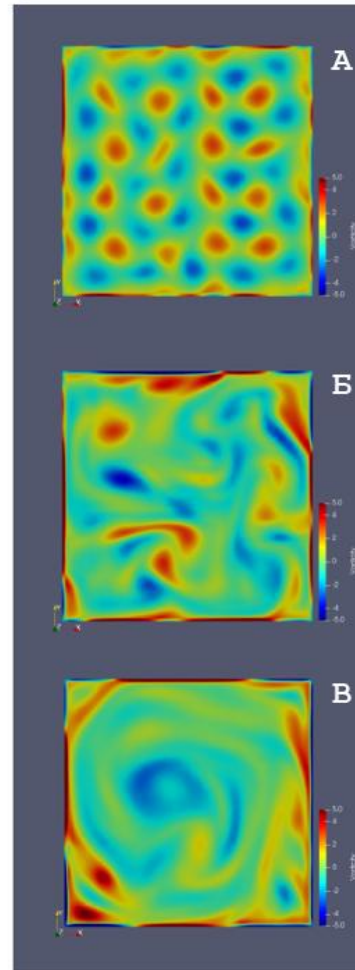
1. Для подсчета частоты наблюдения той или иной величины завихренности производится поиск **максимального ($\max > 0$)** и **минимального ($\min > 0$) значения завихренности** (наблюдаемой в расчетной ячейке) по всем сохраненным полям в пределах выделенного интервала времени.
2. Полученный **интервал от $\min$ до $\max$ разбивается** на интервалы меньшего размера, количество которых равно **количеству рангов**, выбранному заранее, например,
 $\text{Rang_max} = 100$. Таким образом, длина каждого интервала будет равной
 $(\max - \min) / \text{Rang_max}$.
3. Рассчитываем, **сколько величин завихренности попадает в различные интервалы**.
4. Далее производится **СОРТИРОВКА ИНТЕРВАЛОВ** от минимального значения частоты встречаемости завихренности к максимальному. **Номер интервала в сортировке называется РАНГОМ**.
5. Строится **зависимость частоты встречаемости завихренности от номера интервала(РАНГА)**.

ПОСТРОЕНИЕ РАНГОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДЛЯ ЧАСТОТЫ ВСТРЕЧАЕМОСТИ ЗАВИХРЕННОСТИ

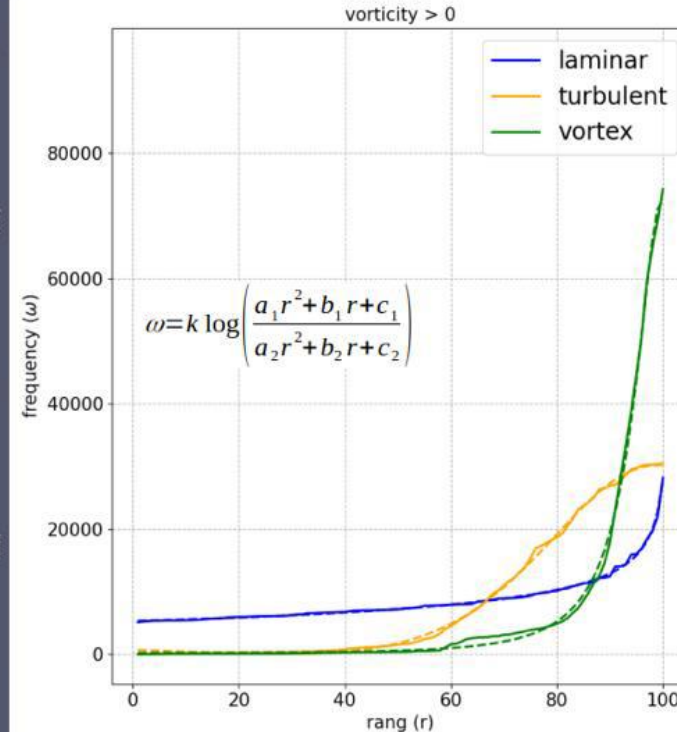
Отрицательная завихренность



	k = 28170	a ₁ = 0.34	b ₁ = -78	c ₁ = 4394
		a ₂ = 0.22	b ₂ = -46	c ₂ = 2400
	k = 32862	a ₁ = 0.20	b ₁ = -23	c ₁ = 940
		a ₂ = 0.10	b ₂ = -18	c ₂ = 873
	k = 95204	a ₁ = 0.10	b ₁ = -18	c ₁ = 855
		a ₂ = 0.09	b ₂ = -17	c ₂ = 818



Положительная завихренность



	k = 28170	a ₁ = 0.062	b ₁ = -17.2	c ₁ = 1115
		a ₂ = 0.054	b ₂ = -12.5	c ₂ = 721
	k = 32862	a ₁ = 0.887	b ₁ = -123.1	c ₁ = 5384
		a ₂ = 0.557	b ₂ = -104.3	c ₂ = 5102
	k = 95204	a ₁ = 0.047	b ₁ = -9.24	c ₁ = 461.4
		a ₂ = 0.046	b ₂ = -9.19	c ₂ = 458.7

Ламинарный режим:

МОНОТОННОСТЬ;

Вихревой режим:

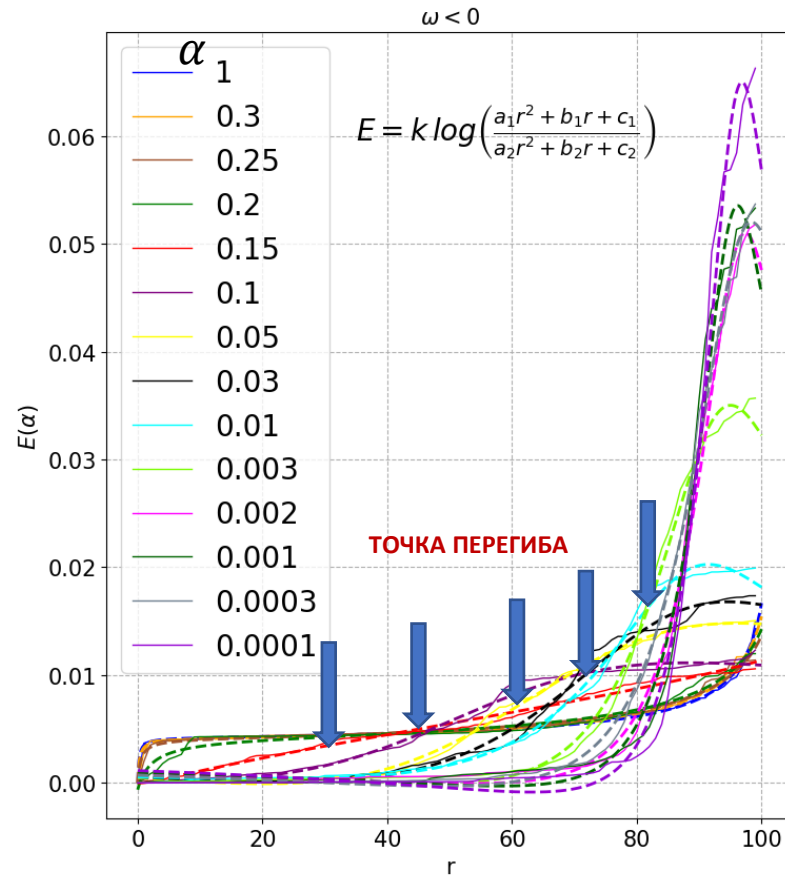
большой градиент;

Турбулентный режим:

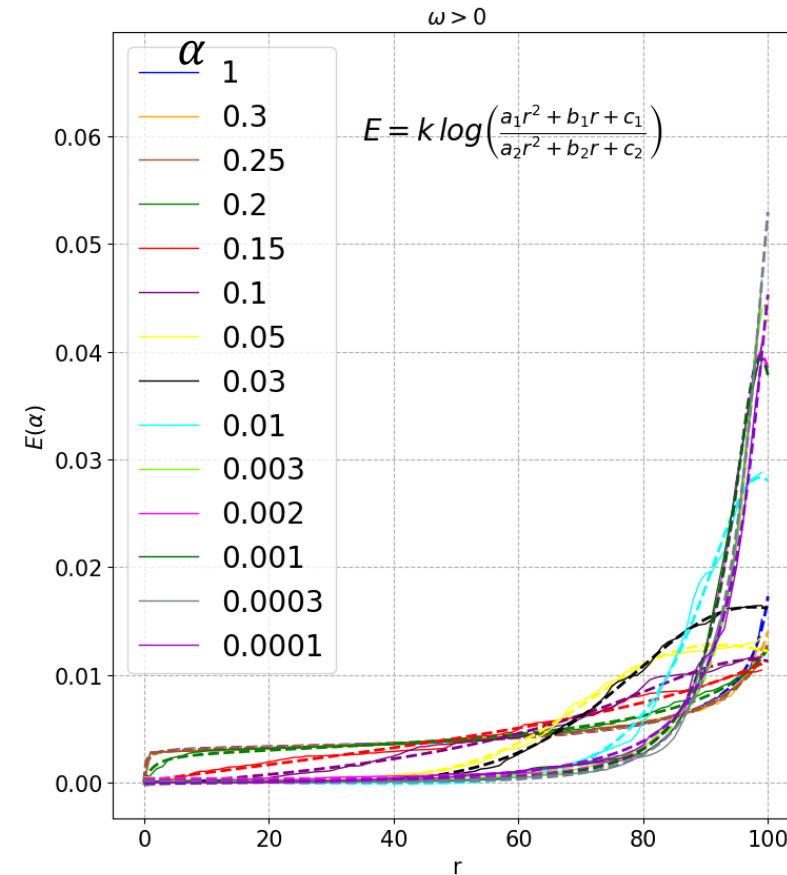
появление точки перегиба

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ ПЕРЕГИБА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ДОННОГО ТРЕНИЯ

Отрицательная завихренность



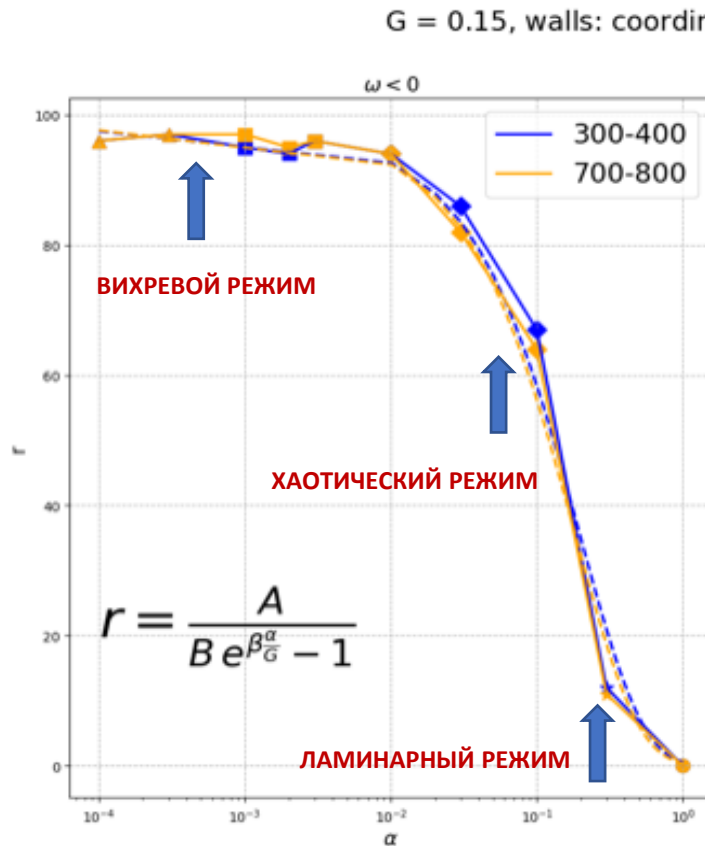
Положительная завихренность



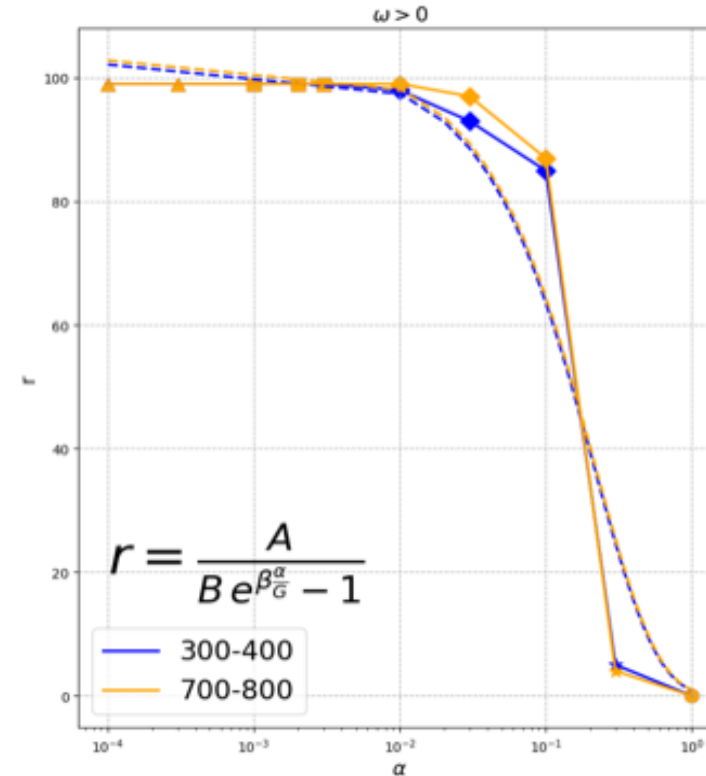
В хаотическом режиме появляется **ТОЧКА ПЕРЕГИБА**,
для ламинарного режима она отсутствует,
для вихревого она находится в области высоких рангов.

ГРАФИК РАНГА ТОЧКИ ПЕРЕГИБА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ДОННОГО ТРЕНИЯ

Отрицательная завихренность



Положительная завихренность



На графике можно выделить три области кластеризации для точек перегиба.

Область высоких рангов занимают точки, соответствующие **вихревому режиму** (ранги 90-100).

Область рангов от 10 до 90 занимают точки, соответствующие **хаотическому режиму**.

Область низких рангов занимают точки, соответствующие **ламинарному режиму** (ранги 1-10).

ОСОБЕННОСТИ КВАЗИ- ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА ИФТТ РАН, ЧЕРНОГОЛОВКА

Основной особенностью вращающейся турбулентности является подавление вертикальных градиентов движения жидкости, в результате чего образуются **КВАЗИДВУМЕРНЫЕ СТОЛБОВЫЕ ВИХРИ, ВЫТЯНУТЫЕ ВДОЛЬ ОСИ ВРАЩЕНИЯ.**

При некоторых условиях могут возникать долгоживущие когерентные вихри

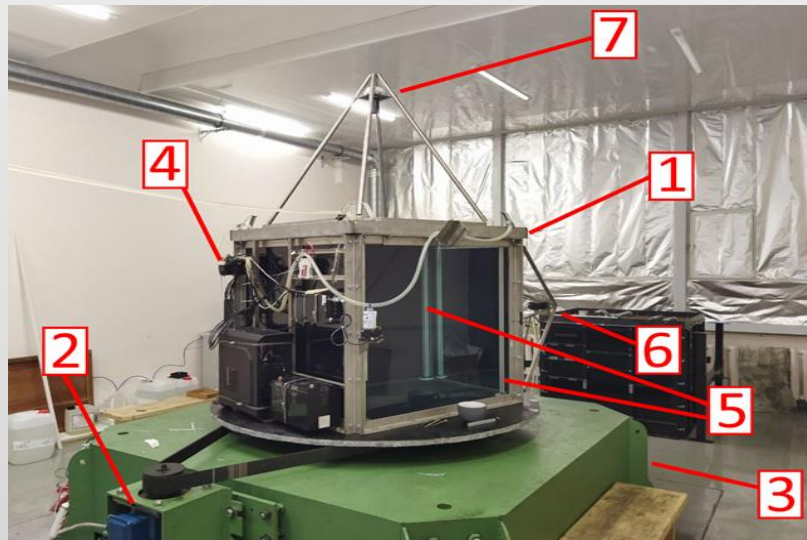


Схема экспериментальной установки: 1 – куб, 2 – двигатель, 3 – металлическая платформа, 4 – циркуляционный насос, 5 – лопатки, 6 – лазер для создания лазерного листа, 7 – камера.

D. D. Tumachev, S. V. Filatov, S. S. Vergeles and A. A. Levchenko, “Two regimes of the dynamics of coherent columnar vortices in a rotating fluid,” *Pis'ma v Zh. Eksper. Teoret. Fiz.*, **118** No. 6, 430–437, 2023.

Численно исследуется квази- двумерное течение несжимаемой жидкости в кубической ячейке при наличии силы Кориолиса.

Система уравнений Навье- Стокса:

СИЛА КОРИОЛИСА



$$Re = \frac{uD}{\nu}$$

Число Рейнольдса

$$Ro = \frac{u}{L 2\Omega}$$

Число Россби

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u}\nabla\vec{u} + 2[\vec{\Omega} \times \vec{u}] - \frac{\vec{f}}{\rho} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\vec{u} \\ \nabla\vec{u} = 0 \\ \vec{f} = f_0 \begin{pmatrix} -\sin(k_f y) \\ \sin(k_f y) \\ \sin(k_f y) + \sin(k_f x) \end{pmatrix} \\ \vec{u}|_{\Gamma} = 0; \quad \nabla p|_{\Gamma} = 0 \end{array} \right.$$

плотность:

кинематическая вязкость:

волновой вектор накачки:

амплитуда силы накачки:

угловая скорость:

$$\rho = 1$$

$$\nu = 0.01$$

$$k_f = 4$$

$$f_0$$

$$\Omega$$

ИЗМЕНЯЕМЫЕ ПАРАМЕТРЫ



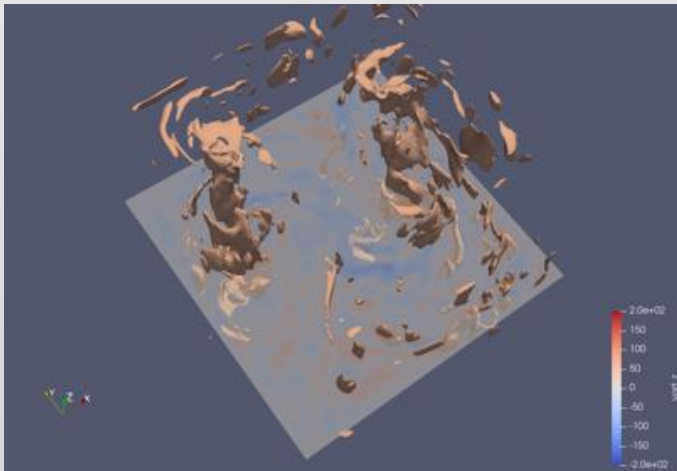
расчёт	Ω	f_0	Re	Ro	режим
1	50	20	2390	0.239	несколько циклонов
2	50	10	2630	0.263	несколько циклонов
3	50	30	2650	0.265	циклон и антициклон внутри
4	50	5	2490	0.249	циклон и антициклон внутри
5	40	20	2060	0.257	несколько неустойчивых циклонов
6	30	20	1300	0.216	несколько циклонов
7	20	20	630	0.158	хаотическая турбулентность
8	10	20	430	0.216	хаотическая турбулентность

Возникновение когерентных вихрей наблюдается в квази- двумерных турбулентных течениях во вращающейся жидкости, когда сила Кориолиса доминирует над силами инерции.

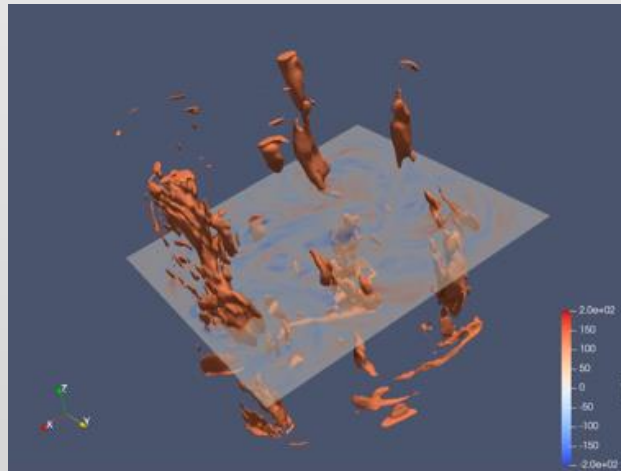
В этом случае формируются **ГЕОСТРОФИЧЕСКИЕ ВИХРИ**.

Структура течения в этих вихрях **ОДНОРОДНА ВДОЛЬ ОСИ ВРАЩЕНИЯ**, а скорость течения направлена в плоскости, ортогональной оси вращения.

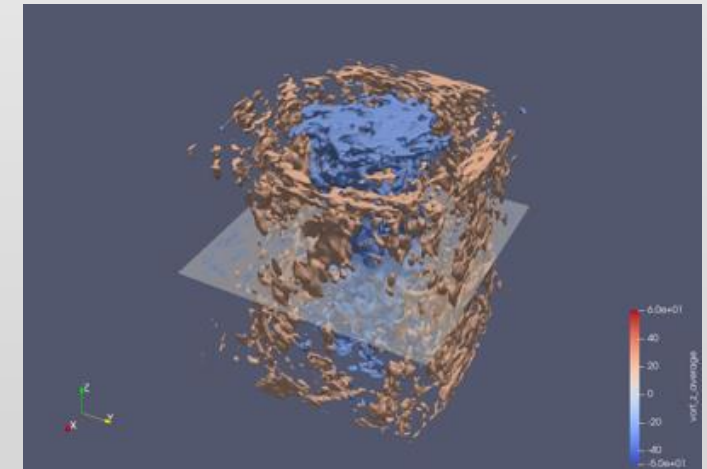
Снижение размерности течения приводит к **смене прямого каскада энергии, характерного для трехмерной турбулентности, на обратный**.



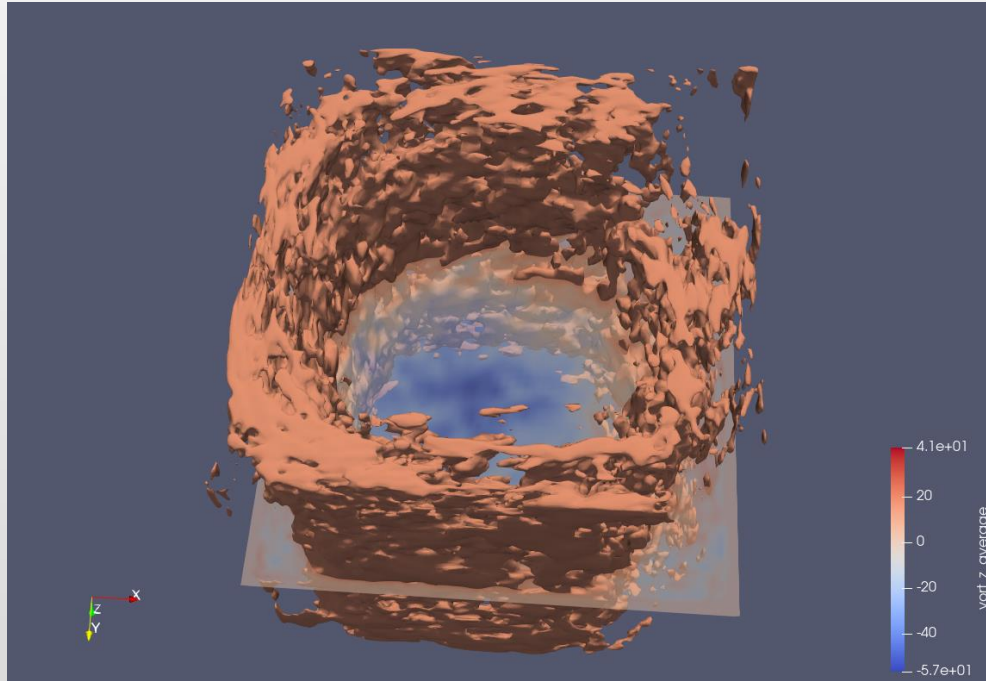
Хаотический режим течения, с большим количеством неоднородных по вертикали вихрей мелких размеров,
 $\Omega=10-20$; $f_0=20$.



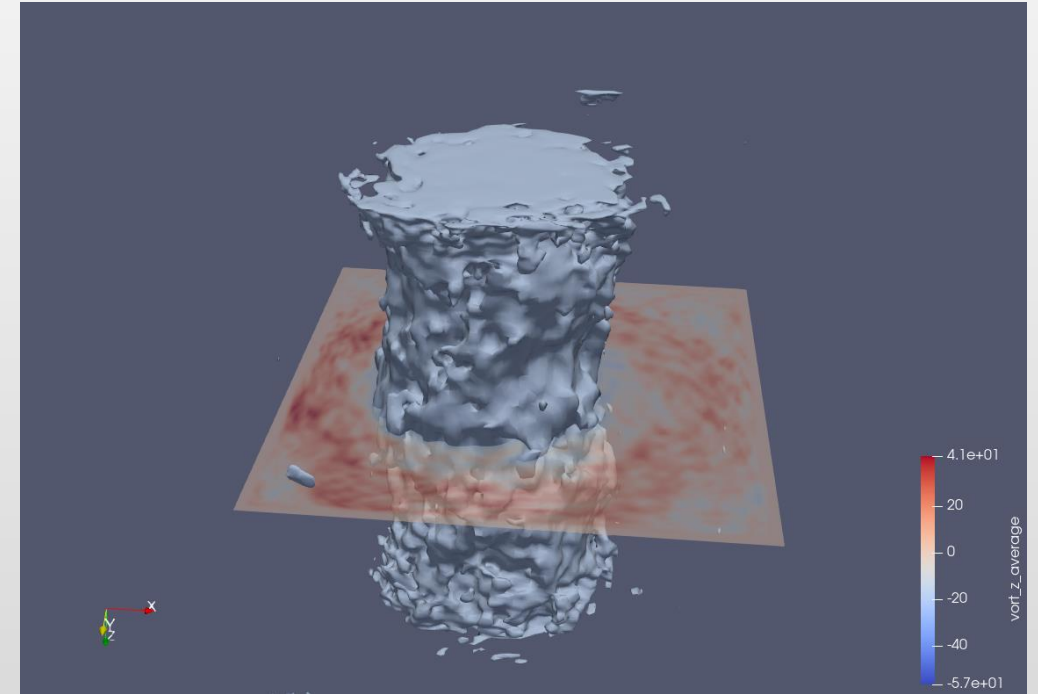
Режим нескольких вихрей-циклонов, однородных по вертикали ,
 $\Omega=50$; $f_0=20$.



Режим одного крупного вихря-циклона, однородного по вертикали, внутри которого возникает антициклон,
 $\Omega=50$; $f_0=30$.

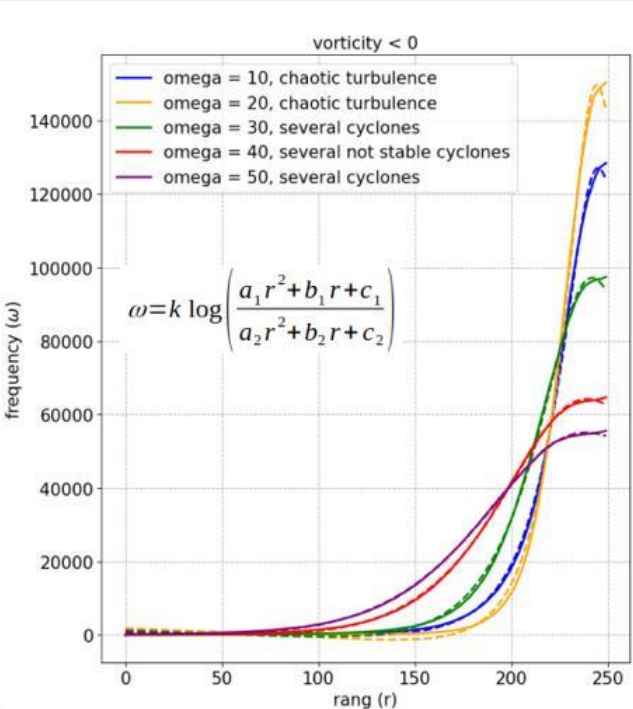


Положительная завихренность

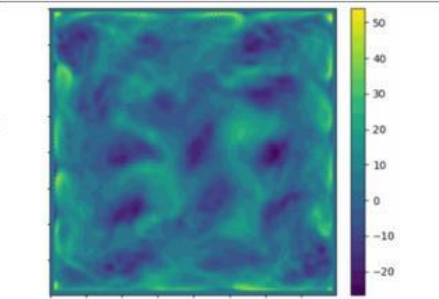


Отрицательная завихренность

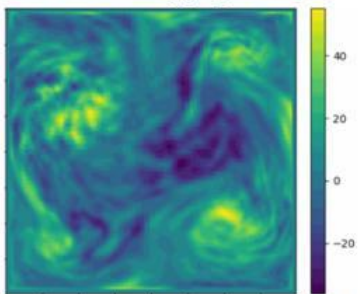
Отрицательная завихренность



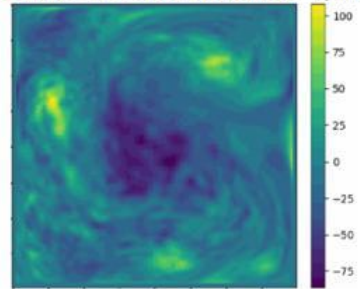
	k = 150363	a ₁ = 0.0015	b ₁ = -0.678	c ₁ = 79.7
		a ₂ = 0.0013	b ₂ = -0.638	c ₂ = 77.6
	k = 128458	a ₁ = 0.0594	b ₁ = -27.4	c ₁ = 3254
		a ₂ = 0.0537	b ₂ = -26.1	c ₂ = 3192
	k = 97485	a ₁ = 0.3833	b ₁ = -163.3	c ₁ = 18614
		a ₂ = 0.3156	b ₂ = -150.4	c ₂ = 18060
	k = 64753	a ₁ = 0.0082	b ₁ = -3.011	c ₁ = 333
		a ₂ = 0.0059	b ₂ = -2.728	c ₂ = 323
	k = 55592	a ₁ = 0.9031	b ₁ = -302.4	c ₁ = 33798
		a ₂ = 0.6083	b ₂ = -277.3	c ₂ = 32854



хаотическая турбулентность

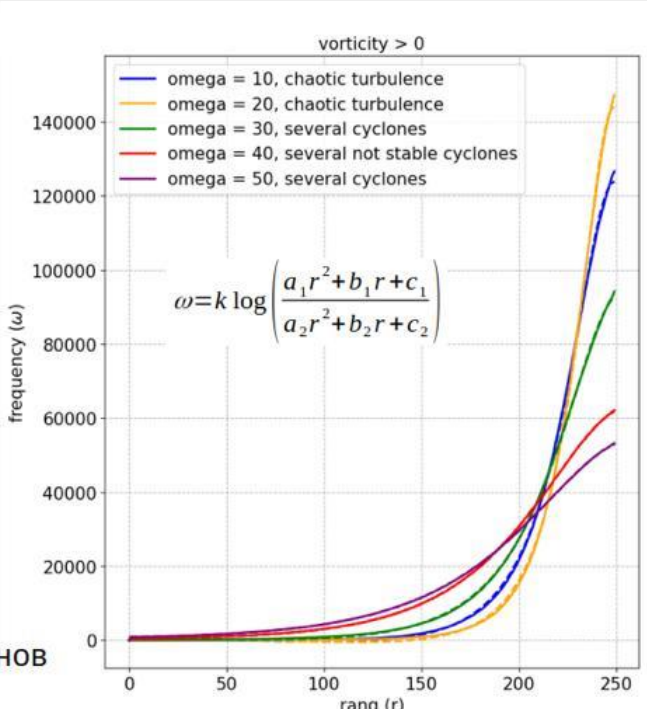


несколько нестабильных циклонов



несколько циклонов

Положительная завихренность

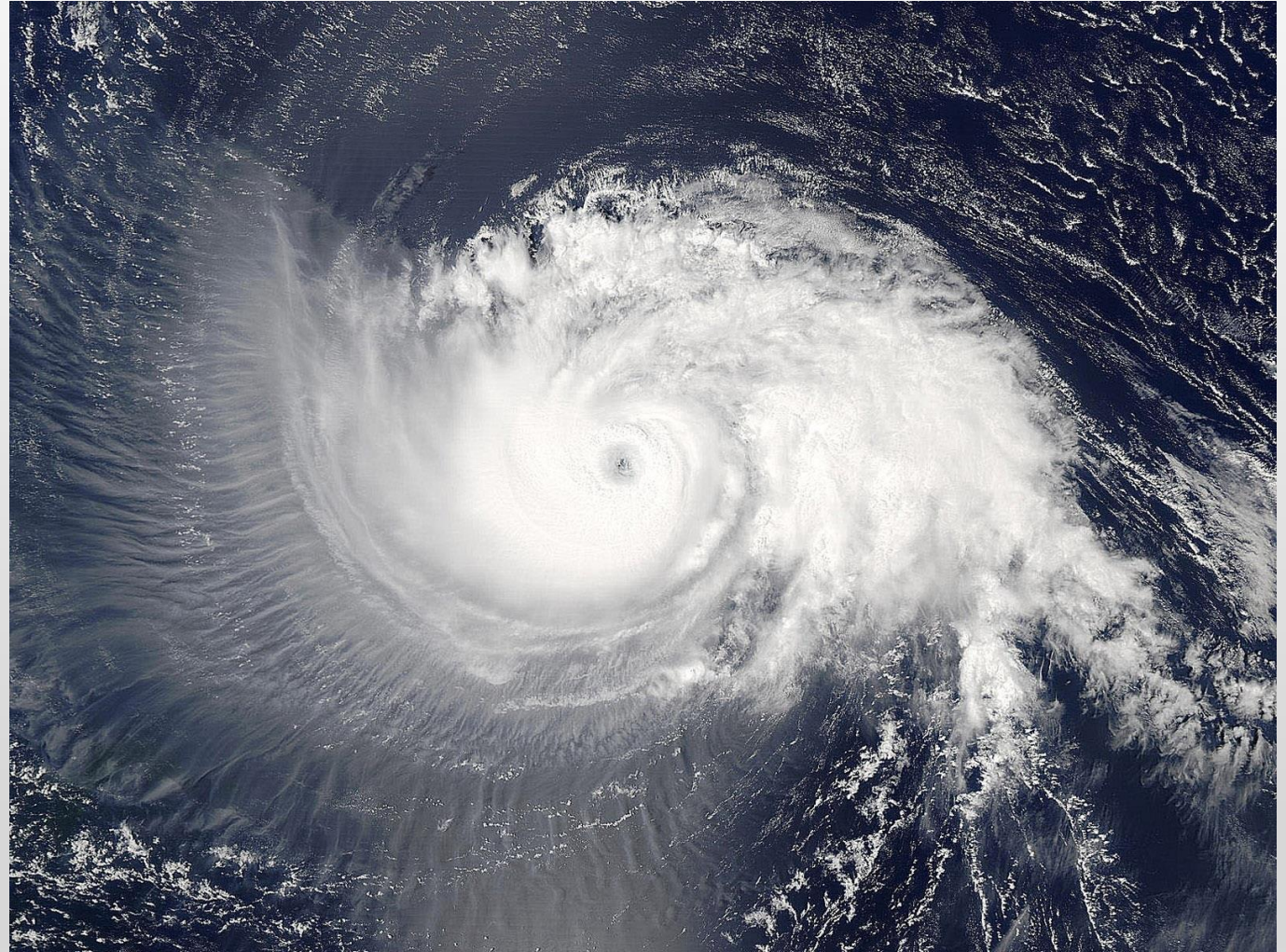


	k = 150363	a ₁ = 0.0089	b ₁ = -4.196	c ₁ = 508
		a ₂ = 0.0082	b ₂ = -4.035	c ₂ = 501
	k = 128458	a ₁ = 0.1560	b ₁ = -72.0	c ₁ = 8694
		a ₂ = 0.1394	b ₂ = -68.9	c ₂ = 8570
	k = 97485	a ₁ = 0.0071	b ₁ = -3.225	c ₁ = 397
		a ₂ = 0.0062	b ₂ = -3.103	c ₂ = 392
	k = 64753	a ₁ = 0.00067	b ₁ = -0.282	c ₁ = 36.6
		a ₂ = 0.00055	b ₂ = -0.279	c ₂ = 35.9
	k = 55592	a ₁ = 0.2014	b ₁ = -83.3	c ₁ = 11372
		a ₂ = 0.1656	b ₂ = -83.8	c ₂ = 10960

Проведенный анализ
позволяет
сопоставить различным
режимам течения
**характеристические ранговые
распределения.**

Существенно различается
амплитуда частоты
встречаемости завихренности.

- Предложены различные подходы к анализу двумерных и квази-двумерных вихревых течений
- Метод рангового распределения является перспективным для дальнейших исследований вихревых течений



- M.A. Guzev, S. V. Fortova, A.N. Doludenko, A.O. Posudnevskaya, A.D. Ermakov, Maslov Rank Distributions for the Analysis of Two-Dimensional and Quasi-Two-Dimensional Turbulent Flows // Russian Journal of Mathematical Physics 2024
- А. О. Посудневская, С. В. Фортова, А. Н. Долуденко, И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, Численное исследование переходных режимов течения Колмогорова в квадратной ячейке // ЖВМ 2024
- Doludenko A.N., Fortova, S.V., Kolokolov, I.V., Lebedev, V.V. Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction // Physics of Fluids 2021 Vol. 33 011704
- Doludenko A.N., Fortova S.V., Kolokolov I.V., Lebedev V.V. Coherent vortex versus chaotic state in two-dimension turbulence // Annals of Physics 2022 Vol. 447 part 2 169072