Интегралы сохранения и случайные источники в теории турбулентности

Владислав Пролетарьевич Юшков

Физический факультет МГУ

yushkov@phys.msu.ru

Две цитаты

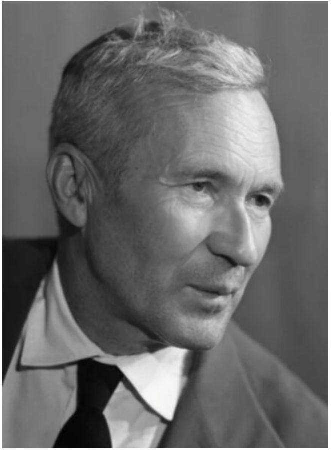
“Турбулентность — последняя крупная нерешенная задача классической физики”

Ричард Фейнман

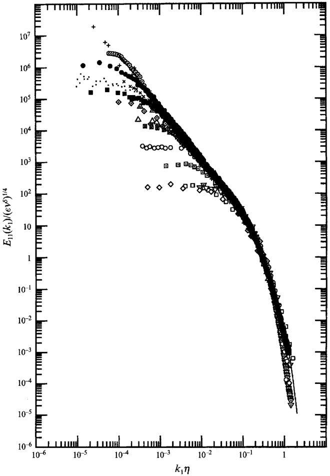
“Полученная функция (спектра турбулентных пульсаций) вполне аналогична известной функции Планка для распределения энергии в спектре черного тела”

Александр Михайлович Обухов

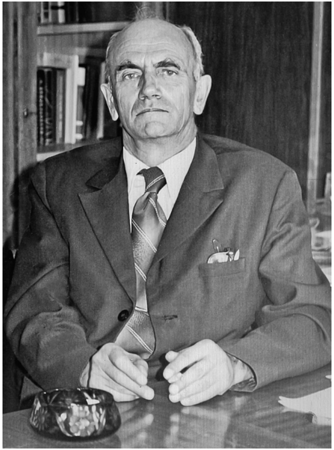
Можно ли изменить теорию турбулентности?



S. G. Saddoughi and S. V. Veeravalli



Kolmogorov's universal scaling for one-dimensional longitudinal power spectra



Гамильтонов формализм гильбертовых пространств

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{p}} \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{q}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \left(\Phi + \int \frac{dp}{\rho}\right) \qquad \mathcal{W} = \int \mathcal{L} dt$$

$$\int \mathcal{R}_a(t-\tau)\,\psi_n(\tau)\,d\tau = \lambda_n \psi_n(t)$$

$$\phi = \rho/\overline{\rho} = \psi^* \psi \text{ , где } \psi = \sum_n C_n \psi_n(\mathbf{r})\, \mathrm{e}^{i\omega_n t} \quad , \quad \sum_n C_n^2 = 1$$

Гамильтонов формализм и адиабатические волны

В.Е.Захаров. Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией

$$\begin{aligned} a_k &= \alpha_k p_k + \beta_k q_k, \quad \alpha_{-k} = \alpha_k, \\ a_k^* &= \alpha_k^* p_k^* + \beta_k^* q_k^*, \quad \beta_{-k} = \beta_k \end{aligned} \tag{11}$$

и потребуем выполнения условия

$$\alpha_k \beta_k^* - \alpha_k^* \beta_k = i. \tag{12}$$

Условие (12) приведет к тому, что уравнения для a_k имеют вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i \frac{\delta H}{\delta a_k^*} = 0. \tag{13}$$

Потребуем далее, чтобы в новых переменных гамильтониан H_0 имел вид

$$H_0 = \int \omega_k a_k a_k^* dk, \tag{13a}$$

Система уравнений гидродинамики

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \,\mathrm{div}\, \mathbf{V}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} + \nu\Delta\mathbf{V} + \mathbf{f}$$

$$\frac{\partial \rho(\mathcal{U} + \Phi + \mathcal{K})}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{V}(\mathcal{H} + \Phi + \mathcal{K})) = \rho\dot{\mathcal{Q}}$$

$$p = \rho R_\mu T$$

Приближения теории турбулентности

1. Приближение несжимаемости
2. Приближение Буссинеска
3. Гипотеза Тейлора
4. Приближение стационарности и однородности

Четыре приближения

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}_a \neq 0 \qquad \frac{dS}{dt} \neq 0$$

$$\frac{\sigma_p}{\overline{\rho} R_\mu \sigma_T} \ll 1 \qquad p_a/\overline{\rho} \sim \sigma_a c_s \sim \frac{\sigma_v^2}{2} \sim p_t/\overline{\rho}$$

$$\frac{dS}{dt} = \gamma \Delta S + \frac{\dot{Q}}{T} \quad : \quad \gamma \gg (\frac{4}{3}\nu + \xi) + (\frac{C_P}{C_V} - 1)\chi$$

$$\varepsilon_v' = \varepsilon_v^+ - \varepsilon_v^- \sim T\frac{dS}{dt} \sim \varepsilon_c \sim w'\frac{\partial E_T}{\partial z}$$

Скорость диссипации флуктуаций скорости звука

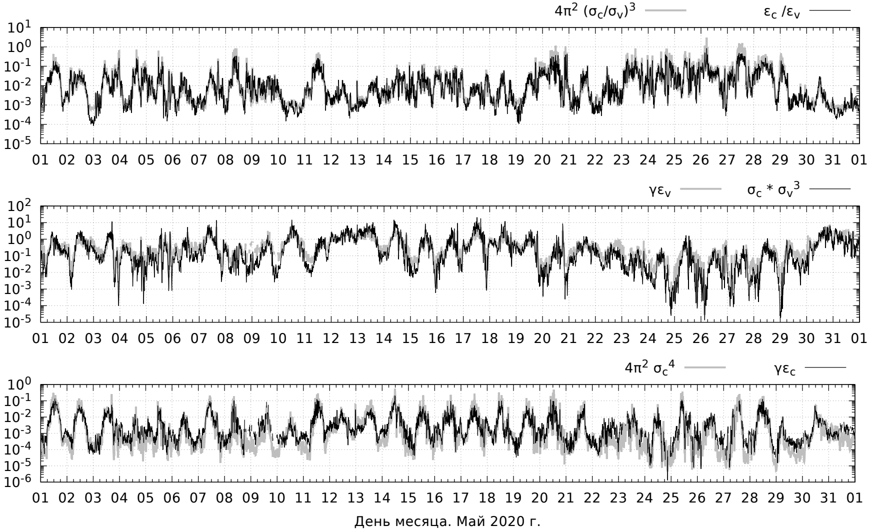
$$c_s^2 = \frac{C_P}{C_V} R_\mu T \quad : \quad \frac{T'}{\overline{\overline{T}}} = \frac{2c_s'}{\overline{c}_s} = -\frac{\rho'}{\overline{\rho}} \quad : \quad \sigma_c^2 = 0.1\frac{C_P}{\overline{\overline{T}}} \sigma_T^2$$

$$\varepsilon_c = 0.1\frac{C_P}{\overline{\overline{T}}} \varepsilon_T \sim T\frac{dS}{dt} = c_s^2 \frac{d\Lambda}{dt} \sim \varepsilon_v'$$

$$\langle \rho \varepsilon_v' \rangle = \langle \rho' \varepsilon_v' \rangle = \langle \rho' \frac{dE_T}{dt} \rangle = -\langle E_T' \frac{d\rho}{dt} \rangle = \overline{\rho}\varepsilon_a$$

$$\sigma_p^v \sim \overline{\rho} E_T \sim \sigma_p^a = \overline{\rho}\sigma_a \overline{c}_s \quad : \quad \frac{\sigma_p}{\rho R_\mu \sigma_T} \sim \frac{\sigma_p}{c_s^2 \sigma_\rho} \sim 0.7\frac{\sigma_a}{\sigma_c}$$

Измерения флуктуаций в АПС. Москва, май 2020г



Связь турбулентных и адиабатических флуктуаций

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_v} = 4\pi^2 \frac{\sigma_c^3}{\sigma_v^3} \quad \text{, или} \quad \frac{\sigma_v^3}{2\pi\varepsilon_v} = \frac{2\pi\sigma_c^3}{\varepsilon_c} = L_c = \frac{2\pi}{\kappa_c} \quad \text{тогда} \quad \varepsilon_c = \kappa_c \sigma_c^3$$

$$\widehat{\gamma}\varepsilon_v = \sigma_c \sigma_v^3 \qquad \text{или} \qquad \widehat{\gamma}\varepsilon_c = 4\pi^2 \sigma_c^4$$

$$L_a = c_s \tau_a = L_c = 2\pi\sigma_c^3/\varepsilon_c \quad \text{где} \quad \tau_a = \sigma_a^2/\varepsilon_c \quad \text{и} \quad \widehat{\gamma}\varepsilon_c = E_a E_T$$

$$\int\limits_0^\infty \rho\varepsilon_c dz = \int\limits_0^\infty \rho\varepsilon_a dz \quad \text{, но} \quad \varepsilon_c \gg \varepsilon_a \quad \text{в АПС} \quad : \quad \langle \rho' \varepsilon_v' \rangle = \overline{\rho}\varepsilon_a$$

Историческая справка

“Вопрос о пульсациях давления в турбулентном потоке, по-видимому, связан с проблемой взаимодействия звукового поля и турбулентности, однако с точки зрения акустики турбулентного потока представляет интерес не только пространственная структура, но и временной спектр турбулентных пульсаций давления”

Обухов А.М. *Пульсации давления в турбулентном потоке.*
Доклады АН СССР, 1949, **66**, № 1, 17–20.
Представлено академиком А.Н.Колмогоровым

Потенциально доступная энергия турбулентных флуктуаций

$$\gamma \sigma_{\dot{p}} = \sigma_{p_a}^2 / \overline{\rho} = \frac{\overline{\rho}}{z} \int_0^\infty \frac{\gamma^2 \omega \, d\omega}{\exp(\gamma\omega / E_P) - 1}$$

$$\sum_n P_n E_n^P = \overline{E}_T$$