Доказательство гипотезы Хопфа о структуре турбулентности

В.В. Носов[1], В.П. Лукин[1], П.Г. Ковадло[2], Е.В. Носов[1], А.В. Торгаев[1]

[1] Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, г.Томск
[2] Институт солнечно-земной физики СО РАН, г. Иркутск

Основная (фундаментальная) проблема турбулентности

**По начальным значениям гидродинамических полей
и соответствующим граничным условиям
установить значения гидродинамических характеристик потока
для любого последующего момента времени**

по формулировкам А.А. Фридмана, Л.В. Келлера (1924)
и А.С. Монина, А.М. Яглома (1965):

Фридман А.А., Келлер Л.В. Дифференциальные уравнения турбулентного движения сжимаемой жидкости // Фридман А.А. Избранные труды. М.: Наука, 1966. 462 с. С. 45-57. (пер. с нем. ***Friedman A., Keller L.*** Differentialgleichungen für die turbulente Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit // Proc. of the First Internat. Congress for Appl. Mech., Delft, Apr. **1924**. The Netherlands, Delft: Technische Boekhandel en Drukkerij J. Waltman, Jr., 1925. S. 395–405.)

Как известно, Осборну Рейнольдсу удалось так преобразовать гидродинамические уравнения движения вязкой однородной несжимаемой жидкости, что в эти полученные им уравнения входят только некоторые осредненные значения компонент скорости и вместе с ними шесть величин, которые характеризуют состояние турбулентности в данном месте и в данное время. Эти величины, таким образом, представляют шесть новых неизвестных функций координат и времени, и полученной Рейнольдсом системы уравнений недостаточно для того, чтобы из них и из начальных значений определить неизвестные функции.

В настоящей работе мы ставим перед собой следующую задачу: для дальнейшего развития идей Рейнольдса по возможности усовершенствовать систему величин, характеризующую турбулентность, так, чтобы их значения для начального момента времени — вместе с относящимися к этому же моменту осредненными значениями кинематических и динамических элементов — были достаточны для получения соответствующих значений этих функций в каждый последующий момент времени. При этом мы исследуем преимущественно турбулентность в атмосфере, рассматриваемой как идеальная сжимаемая жидкость.

Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 1. М.:Наука, 1965. 639 с.

ния гидродинамики позволяют однозначно определить значения всех гидродинамических характеристик потока в любой будущий момент времени по начальным значениям гидродинамических полей (и соответствующим граничным условиям). При этом в

Проблема стоит уже более 200 лет

Гипотеза Хопфа

The qualitative mathematical picture which the author conjectures to correspond to the known facts about hydrodynamic flow is this: To the flows observed in the long run after the influence of the initial conditions has died down there correspond certain solutions of the Navier-Stokes equations. These solutions constitute a certain manifold $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mu)$ in phase space invariant under the phase flow. Presumably owing to viscosity $\mathfrak{M}$ has a finite number $N = N(\mu)$ of dimensions. This effect of viscosity is most evident in the simplest case of μ sufficiently large. In this case $\mathfrak{M}$ is simply a single point, $N = 0$.

Эберхард Хопф
Eberhard Hopf

Hopf E. A mathematical example displaying features of turbulence // Communications on Pure and Applied Mathematics. **1948**. V. 1. №. 4. P. 303-322. doi: 10.1002/CPA.3160010401

перевод:

Качественная математическая картина, которая, по предположению (гипотезе) автора, соответствует известным фактам о гидродинамическом потоке, такова: потокам, наблюдаемым в долгосрочной перспективе после того, как влияние начальных условий ослабло, соответствуют определенные решения уравнений Навье-Стокса. Эти решения образуют определенное множество $M = M(\mu)$ в фазовом пространстве, инвариантном относительно фазового потока. Предположительно из-за вязкости M имеет конечное число $N = N(\mu)$ измерений. Этот эффект вязкости наиболее очевиден в простейшем случае, когда μ достаточно велико. В этом случае M - это просто одна точка, $N = 0$.

А.С. Монин *А.М. Яглом*

2.7. Стохастичность [2]

Еще в конце 40-х годов Хопф (1948) высказал гипотезу о том, что все множество фазовых траекторий уравнений Навье—Стокса при $t \to \infty$ притягивается к конечномерному множеству. Для дву-

2.10. Начала теории когерентных структур [2]

Представление турбулентности при умеренных Re как пространственно-временного хаоса конечного числа $N(\mathrm{Re})$ взаимодействующих когерентных структур может служить физической расшифровкой упомянутой в начале п. 2.7 гипотезы Хопфа (1948) о конечномерности аттракторов в фазовом пространстве уравнений Навье—Стокса.

1. *Монин А.С.* Об определении когерентных структур // ДАН СССР. 1991. Т. 318. № 4. С. 853-856.
2. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Т.1. СПб.:Гидрометеоиздат, 1992. 696с.
3. *Монин А.С.* О когерентных структурах в турбулентных течениях // Этюды о турбулентности. М.: Наука. 1994. С. 7-17.

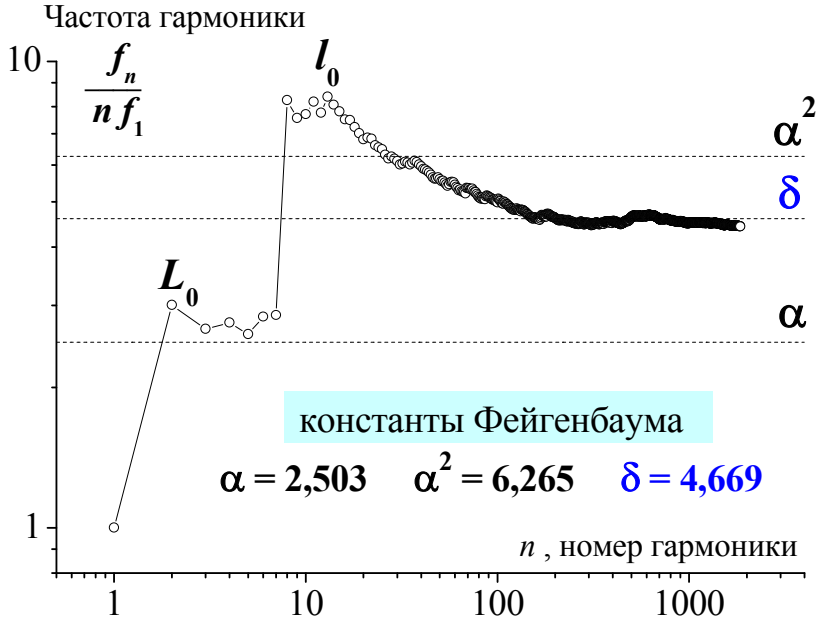
Когерентная структура. Гармонический состав

Установлено [1], что когерентная структура – семейство синфазных вихрей, состоящее из:

- главного энергонесущего вихря и

- когерентных ему вихрей, которые являются продуктами дискретного каскадного распада главного вихря.

Когерентная структура является самокогерентной, или внутренне когерентной, т.е. когерентной внутри себя.



Гармонический состав – частоты стабильных гармоник (вихрей) f_n в спектре флуктуаций W_T одной когерентной структуры

1. *Носов В.В., Григорьев В.М., Ковадло П.Г., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В.* Астроклимат специализированных помещений Большого солнечного вакуумного телескопа. Ч.2 // Оптика атмосферы и океана. 2008. Т.21. № 3. С.207–217.

Когерентная структура соответствует уединённому солитонному решению системы уравнений гидродинамики – уравнений Навье–Стокса:

$$\partial \boldsymbol{u}/\partial t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\,\Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}; \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$$

Когерентные структуры в турбулентных течениях могут быть воспроизведены путем численного решения уравнений гидродинамики [3, 4].

Описание мгновенных состояний турбулентной атмосферы уравнениями Навье–Стокса в настоящее время считается полностью оправданным [2].

2. *Обухов А.М.* Атмосферная турбулентность. 1964. С. 173–183 (пер. с англ. Должанского Ф.В.) // Турбулентность и динамика атмосферы. Л.:Гидрометеоиздат, 1988. 414 с.

3. *Монин А.С.* О когерентных структурах в турбулентных течениях // Этюды о турбулентности. М.: Наука. 1994. С. 7-17.

4. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.:Физматлит, 1994. 448 с.

Колмогоровская турбулентность как сумма конечного числа когерентных структур

Показано [1], что
одномерный пространственный спектр
одной когерентной структуры
можно записать следующим образом

$$V(\varkappa,\varkappa_0)=c_v\varkappa_0\left[\varkappa_0^2+\varkappa^2\right]^{-\frac{4}{3}}$$

$$c_v=0.514C_T^2$$

$$V(\varkappa,\varkappa_0)\sim\varkappa^{-8/3}$$

тогда, для семейства V

$\varkappa_0=2\pi/L_0$ – **параметр семейства**

$$\partial V(\varkappa,\varkappa_0)/\partial\varkappa_0=0 \Rightarrow \varkappa_{0max}=(3/5)^{1/2}\varkappa$$

Уравнение огибающей для семейства спектров

$$V(\varkappa,\varkappa_{0max})\approx 0.4c_v\varkappa^{-5/3}$$

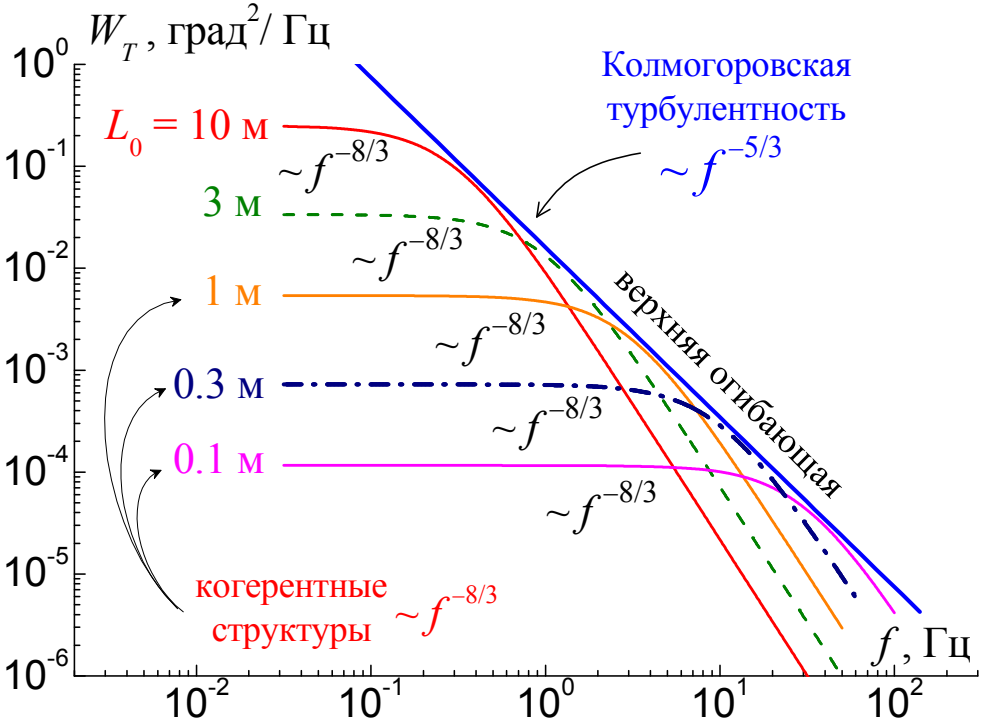
$$\varkappa=\frac{2\pi f}{\upsilon},\ W(f)=\frac{4\pi}{\upsilon}V\left(\frac{2\pi f}{\upsilon}\right)$$

для семейства временных спектров

$$W_T(f)\sim f^{-8/3}$$

огибающая

$$W_T(f)\sim f^{-5/3}$$



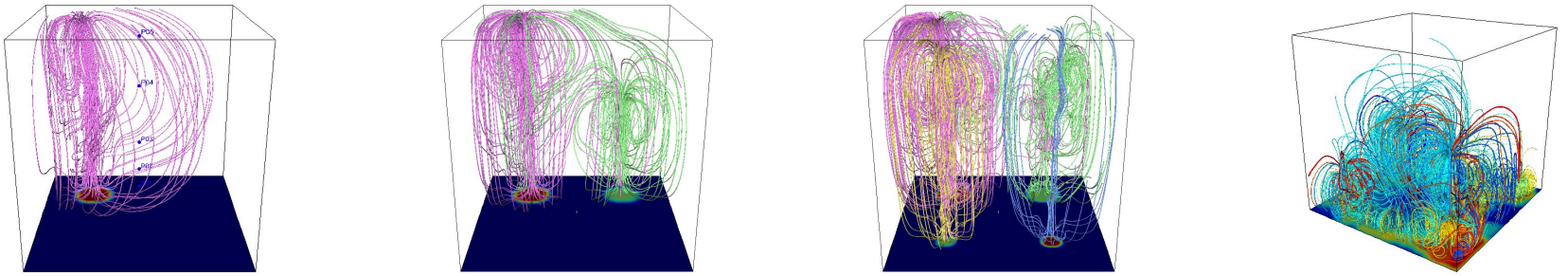
**Показано [1], что
верхняя огибающая суммы всех спектров
разных когерентных структур ($W_T\sim f^{-8/3}$),
имеющих различные
внешние масштабы турбулентности L_0,
соответствует спектру
колмогоровской турбулентности ($W_T\sim f^{-5/3}$).**

1. *Носов В.В., Григорьев В.М., Ковадло П.Г., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В.* Когерентные структуры - элементарные составляющие атмосферной турбулентности // Изв.вузов. Физ. 2012. Т.55. №9/2. С.236-238.

Турбулентность как сумма конечного числа когерентных структур

Численное моделирование

Путем численного решения краевых задач гидродинамики с различными конфигурациями нагрева подстилающей поверхности исследовано формирование турбулентности в закрытом объеме в результате взаимодействия конечного числа когерентных структур [1]

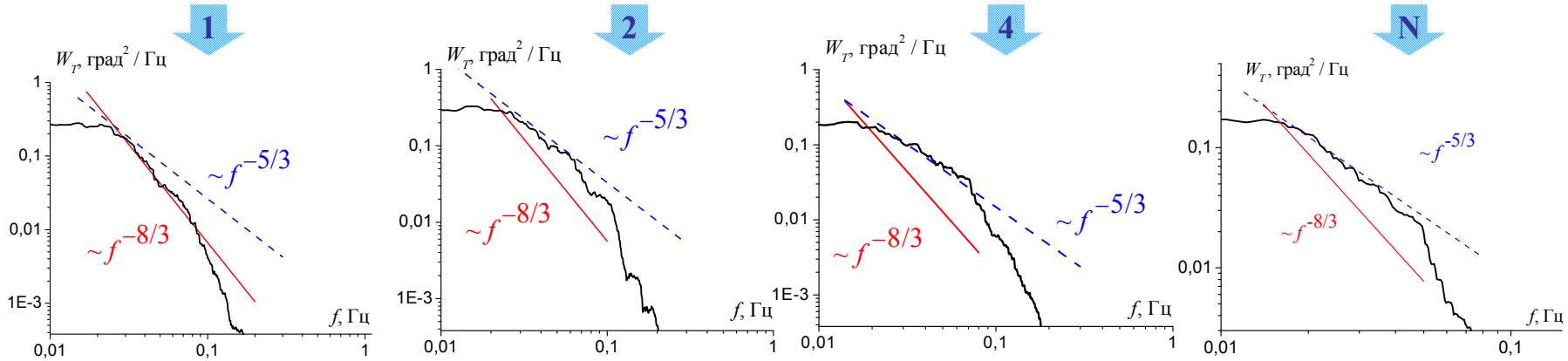


1 нагретое пятно | 2 нагретых пятна | 4 нагретых пятна | *N* неоднородно нагретая поверхность

Конвективные ячейки над нагретой поверхностью

Показано [1], что каждое нагретое пятно порождает когерентную структуру с характерным размером и частотой главного вихря.

Увеличение теплового разнообразия приводит к удлинению колмогоровского участка спектра. Как видно, чем больше "хаоса", тем ближе теоретический спектр к колмогоровскому.

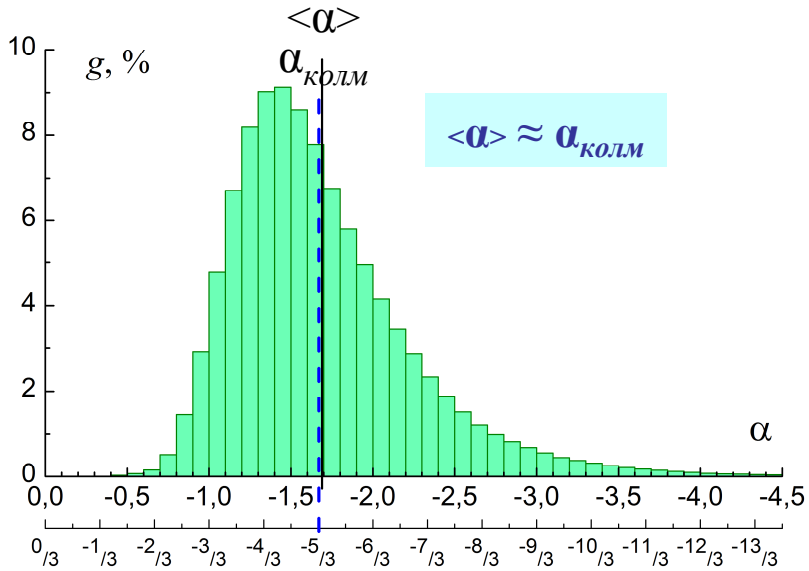


Временной частотный спектр флуктуаций температуры W_T в т. *P05*

1. *Носов В.В., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В.* Структура турбулентности над нагретыми поверхностями. Численные решения // Оптика атмосферы и океана. 2016. Т. 29. № 1. С. 23-30.

Колмогоровская турбулентность как временное среднее

В результате длительных метеоизмерений в атмосферном приземном слое рассчитаны 5485134 одномерных спектра турбулентных флуктуаций температуры W_T [1].



Распределение наклонов α 5 485 134 спектров.
Томск, январь–сентябрь 2021

Наклон α – показатель степени функции f^{α}, аппроксимирующей начальный участок инерционного интервала спектра $W_T(f) \sim f^{\alpha}$

——— <α> – среднее

– – – $\alpha_{колм}$ – наклон спектра колмогоровской турбулентности

Показано [2], что атмосферную турбулентность можно рассматривать как некогерентную смесь различных когерентных структур с несоизмеримыми частотами главных вихрей.

Показано [1], что среднее по всем выборкам значение наклона <α> = –1,69 практически совпадает со значением для колмогоровской турбулентности $\alpha_{колм}$ = –5/3 ≈ –1,67. Таким образом, колмогоровская турбулентность соответствует временному среднему конечного числа некогерентных смесей [2] различных когерентных структур.

1. *Носов В.В., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В.* Определение типа атмосферной турбулентности по данным метеорологических измерений, поступающим в оперативном режиме // Оптика атмосферы и океана. 2024. Т.37. №7. С.563-571.

2. *Носов В.В., Лукин В.П., Ковадло П.Г., Носов Е.В., Торгаев А.В.* Оптические свойства турбулентности в горном пограничном слое атмосферы. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. 153 с.

Основные публикации

1. *Носов В.В., Григорьев В.М., Ковадло П.Г., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В.* **Астроклимат специализированных помещений Большого солнечного вакуумного телескопа**. Ч.2 // Оптика атмосферы и океана. 2008. Т. 21. № 3. С.207–217.
2. *Носов В.В., Григорьев В.М., Ковадло П.Г., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В.* **Когерентные структуры - элементарные составляющие атмосферной турбулентности** // Изв.вузов. Физ. 2012. Т.55. № 9/2. С.236-238.
3. *Носов В.В., Лукин В.П., Ковадло П.Г., Носов Е.В., Торгаев А.В.* **Оптические свойства турбулентности в горном пограничном слое атмосферы**. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. 153 с.
4. *Lukin V.P., Nosov V.V., Nosov E.V., Torgaev A.V.* **Causes of non-Kolmogorov turbulence in the atmosphere** // Applied Optics. 2016. V.55. № 12. P. B163–B168.
5. *Носов В.В., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В.* **Структура турбулентности над нагретыми поверхностями. Численные решения** // Оптика атмосферы и океана. 2016. Т.29. №1. С.23-30.
6. *Nosov V.V.* **Atmospheric Turbulence in the Anisotropic Boundary Layer**. In: Optical Waves and Laser Beams in the Irregular Atmosphere; Blaunshtein N., Kopeika N. (eds.); Boca Raton, Taylor & Francis Group, CRC Press: London, New York, USA. 2018; chapter 3. P.67–180.
7. *Носов В.В., Лукин В.П., Ковадло П.Г., Носов Е.В., Торгаев А.В.* **Перемежаемость колмогоровской и когерентной турбулентности в горном пограничном слое (обзор)** // Оптика атмосферы и океана. 2021. Т. 34. № 9. С. 726–749.
8. *Носов В.В., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В.* **Определение типа атмосферной турбулентности по данным метеорологических измерений, поступающим в оперативном режиме** // Оптика атмосферы и океана. 2024. Т. 37. № 7. С. 563-571.

Апробация

1. Международная конференция **«Турбулентность, динамика атмосферы и климата», ИФА РАН**. **Москва**, 2013, 2018, 2020.
2. Международная конференция **«Солитоны, коллапсы и турбулентность». Новосибирск**, 2012.
3. Конференция **«Сибирский теплофизический семинар». Новосибирск**, 2010, 2014, 2017.
4. Международный симпозиум **«Оптика атмосферы и океана. Физика атмосферы». Томск, Новосибирск, Иркутск, Москва, Санкт-Петербург**, 2008-2024.
5. Международная конференция **«Актуальные проблемы радиофизики». Томск**, 2012–2019.
6. Congress **Imaging and Applied Optics**. **OSA**. Seattle. **Washington**. USA. 2014.
7. Conferences **SPIE Astronomical Telescopes + Instrumentation**. **Edinburgh**, UK. 2016.

Выводы

В работах авторов показано, что:

- сумма всех спектров разных когерентных структур с различными внешними масштабами турбулентности соответствует спектру колмогоровской турбулентности;

- атмосферную турбулентность можно рассматривать как некогерентную смесь различных когерентных структур с несоизмеримыми частотами главных вихрей;

- колмогоровская турбулентность соответствует временному среднему конечного числа некогерентных смесей различных когерентных структур.

Этот достигнутый результат соответствует представлению о турбулентности как о результате взаимодействия конечного числа когерентных структур.

Из сравнения этого представления и представления Хопфа-Монина-Яглома видно, что научные взгляды на структуру турбулентности, сформированные в разные исторические периоды, совпадают;

при этом результаты авторов являются экспериментальным и теоретическим доказательством гипотезы Хопфа.

Учитывая, что вид турбулентного спектра флуктуаций внутри одной когерентной структуры установлен, можно сделать вывод, что турбулентность в значительной степени детерминирована.

Доказанная гипотеза Хопфа:

- уточняет научные представления о турбулентности;

- выясняет значительную роль когерентных структур в архитектуре турбулентности;

- является крупным шагом на пути решения основной проблемы турбулентности.