



ИНСТИТУТ ФИЗИКИ АТМОСФЕРЫ им. А. М. ОБУХОВА



V Всероссийская конференция с международным участием
“Турбулентность, динамика атмосферы и климата”
Посвященная памяти академика А.М. Обухова

Режимы поведения квазигеострофического
эллипсоидального вихря в горизонтальном
потоке с вертикальным сдвигом

Арутюнян Д. А.¹, Жмур В. В.^{1,2}

¹Московский физико – технический университет

²Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН

19–21 ноября 2024 г. Москва

История вопроса

- Кирхгоф 1824- 1887 – Эволюция эллиптической равнозавихренной области, 2D.
- Чаплыгин 1933– Эллиптический 2D вихрь в потоке со сдвигом. Пульсирующий вихрь.
- Kida, 1981 Эволюция 2D вихря Кирхгофа в плоском равнозавихренном потоке. Режимы поведения.
- Жмур, Панкратов 1989; Zhmur, Pankratov 1991; Жмур, Щепеткин 1992; Meacham 1992; Meacham, Жмур, Панкратов, Щепеткин 1994. 3D эллипсоидальные вихри и их эволюция в равнозавихренных течениях.
- Суетин Б. 2023. Кандидатская диссертация. Режимы поведения 3D эллипсоидальных вихрей в баротропных потоках.
- **Вопрос: каковы режимы поведения 3D эллипсоидальных вихрей в бароклинных потоках.**

Элементы теории эллипсоидальных вихрей

Система уравнений геофизической гидродинамике при малых числах Россби сводится к единственному уравнению для давления P (добавка к гидростатическому давлению покоя)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta_h P + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_0 f} J_h \left(P, \Delta_h P + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0 \quad u = -\frac{1}{\rho_0 f} \frac{\partial P}{\partial y} \quad v = \frac{1}{\rho_0 f} \frac{\partial P}{\partial x}$$

В терминах функции тока $\psi = \frac{P}{\rho_0 f}$

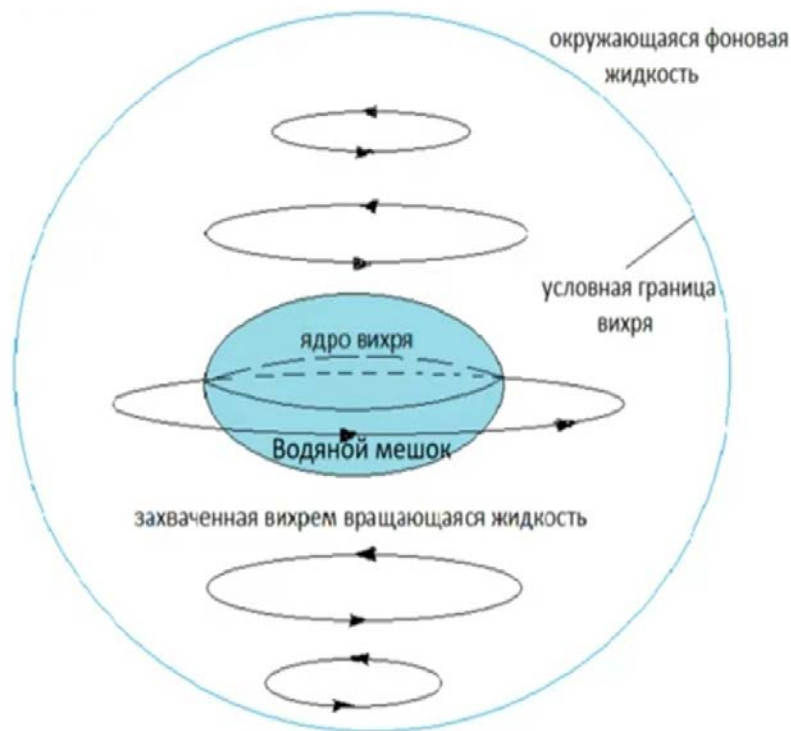
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + J_h \left(\psi, \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0 \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\sigma = \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Физический смысл основного уравнения – сохранение потенциальной завихренности σ у движущейся жидкой частицы.

Связь гравитационного потенциала и функции тока (поля давления)

$$N = \text{const} \quad z_1 = \frac{N}{f} z \quad \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \Delta \psi \quad \Delta \psi = \begin{cases} \sigma_0 = \text{const}, & (x, y, z_1) \in V \\ 0, & (x, y, z_1) \notin V \end{cases}$$



$$\psi(\vec{r}, t) = -\frac{\sigma_0}{4\pi} \iiint_V \frac{d^3 \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

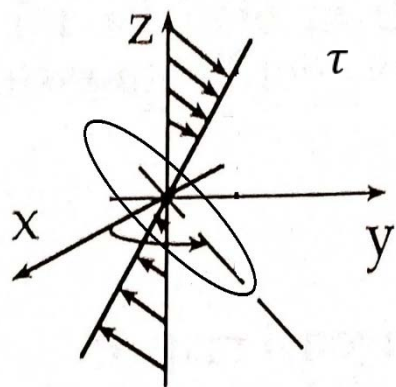
$$\psi = -\frac{\sigma_0}{4} \int_{\lambda}^{\infty} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2 + \mu} - \frac{y_1^2}{b^2 + \mu} - \frac{z_1^2}{\tilde{c}^2 + \mu} \right) \frac{ds}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(\tilde{c}^2 + s)}}$$

$$\tilde{u} = -\frac{\sigma_0}{2} ab\tilde{c} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(b^2 + s)\Gamma(s)} y_1 \quad \tilde{v} = \frac{\sigma_0}{2} ab\tilde{c} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)\Gamma(s)} x_1$$

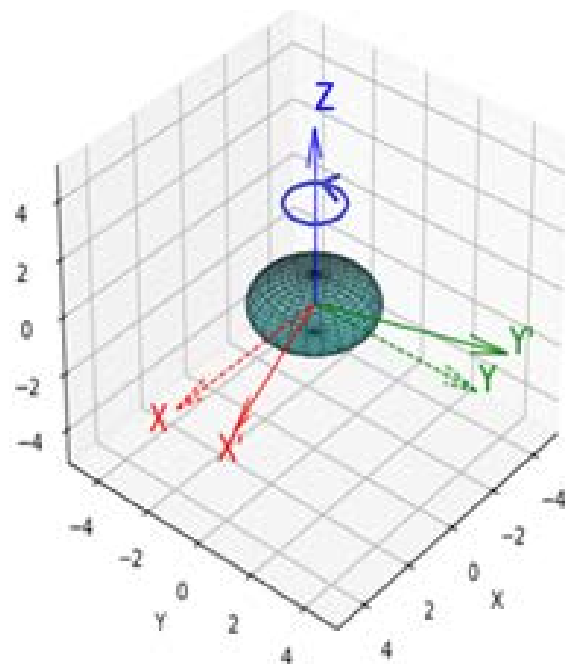
$$\frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y_1^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z_1^2}{\tilde{c}^2 + \lambda} = 0$$

Эволюция вихря во внешнем горизонтальном течении с вертикальным сдвигом

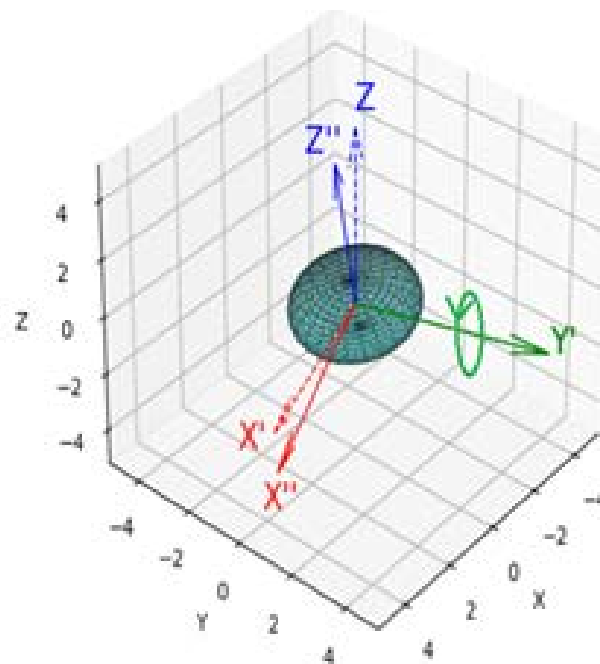
$$\tau = \frac{\Gamma}{\sigma} \text{ безразмерный сдвиг фонового течения}$$



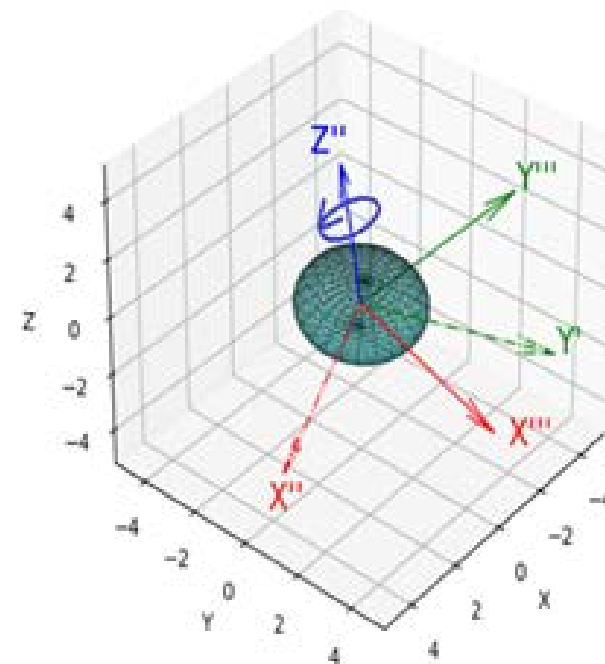
Поворот на угол φ вокруг оси Z



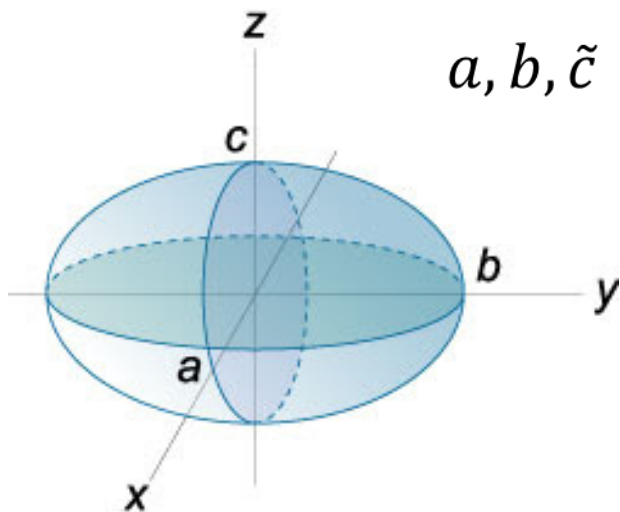
Поворот на угол θ вокруг оси Y'



Поворот на угол ψ вокруг оси Z''



Ядро вихря и его геометрические параметры



$a, b, \tilde{c}$ полуоси; $r_o = \sqrt{ab}$ характерный горизонтальный радиус

Безразмерные характеристики вихря

$\varepsilon = \frac{a}{b}$ удлинение ядра

$K = \frac{\tilde{c}}{\sqrt{ab}}$ сплюснутость ядра

Три угла ориентации (углы Эйлера)

Безразмерная совместная характеристика вихря и течения

$\tau = \frac{\Gamma}{\sigma}$ безразмерный сдвиг фонового течения

$$F(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{\tilde{c}^2} - 1 = 0$$

Кинематическое условие

$$\nabla F \cdot (\vec{U} - \vec{V}) = 0 \iff \vec{x}_1^T F (G + T - J - D) \vec{x}_1 = 0$$

- Матрица F определяется из уравнения поверхности эллипсоида
- Матрица G описывает скорость частицы жидкости генерируемой вихрем, полученная с использованием геострофического соотношения.
- Матрица J описывает скорость на поверхности ядра, вызванную вращением эллипсоида(ядра) как целого.
- Матрица T описывает внешний поток с вертикальным сдвигом.
- Матрица D описывает деформацию границы эллипсоидального ядра

Матрицы

$$F = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c^2 \end{pmatrix}, \quad G = R^{-1}SRP, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_0 \end{pmatrix}, \alpha_0 = \int_0^\infty \frac{\Phi(s)ds}{a^2+s}, \beta_0 = \int_0^\infty \frac{\Phi(s)ds}{b^2+s}, \gamma_0 = \int_0^\infty \frac{\Phi(s)ds}{c^2+s}, \Phi(s) = \frac{abc}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}$$

$$R = \begin{pmatrix} -\sin\psi\sin\theta + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\psi\cos\theta + \sin\psi\cos\varphi & -\sin\psi\sin\psi\cos\theta + \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\psi\cos\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\psi} - \dot{\varphi}\cos\theta & \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta & 0 & -\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi - \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi & \dot{\psi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi & 0 \end{pmatrix},$$

$$T = R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot R,$$

$$D = \begin{pmatrix} \dot{a}/a & 0 & 0 \\ 0 & \dot{b}/b & 0 \\ 0 & 0 & \dot{c}/c \end{pmatrix}$$

Критерий выполнения кинематического условия:
антисимметричность матрицы

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
 a_{11} &= \frac{\Gamma a (\sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \cos \theta) \sin \theta \cos \psi - \dot{a}}{a^3} \\
 a_{12} &= \frac{-\beta_0 \cos \theta + \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta - \Gamma \cdot (\sin \psi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \cos \theta) \sin \psi \sin \theta}{a^2} \\
 a_{13} &= \frac{\gamma_0 \sin \psi \sin \theta - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi - \Gamma \cdot (\sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \cos \theta) \cos \theta}{a^2} \\
 a_{21} &= \frac{\alpha_0 \cdot \cos \theta - \dot{\varphi} \cos \theta - \dot{\psi} + \Gamma \cdot (\sin \psi \cos \psi + \sin \psi \cos \psi \cos \theta) \sin \theta \cos \psi}{b^2} \\
 a_{22} &= \frac{-b \Gamma \cdot (\sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta) \sin \psi \sin \theta - \dot{b}}{b^3} \\
 a_{23} &= \frac{\gamma_0 \sin \theta \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi - \Gamma \cdot (\sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta) \cdot \cos \theta}{b^2} \\
 a_{31} &= \frac{-\alpha_0 \cdot \sin \psi \sin \theta + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi - \Gamma \cdot \sin \theta \cos \varphi \cos \psi}{c^2} \\
 a_{32} &= \frac{-\beta_0 \sin \theta \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta - \dot{\theta} \cos \psi + \Gamma \cdot \sin \psi \sin^2 \theta \cos \varphi}{c^2} \\
 a_{33} &= \frac{\frac{1}{4} \Gamma \cdot c \cdot (-\sin(\varphi - 2\theta) + \sin(\psi + 2\theta)) - \dot{c}}{c^3}
 \end{aligned}$$

Модель поведения вихря

$$\dot{\varepsilon} = -\tau \sin \theta [\sin 2\psi \cdot \sin \varphi - \cos \theta \cos 2\psi \cos \varphi] \cdot \varepsilon$$

$$\dot{K} = \frac{3}{4} \tau \sin 2\theta \cos \varphi$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2) + \frac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_2) \cos 2\varphi + \tau \left(\frac{K^2}{\sin \theta} \right) \cdot \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \psi}{\varepsilon^{-1} - K^2} + \frac{\cos^2 \psi}{\varepsilon - K^2} \right) \sin \varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon^{-1} - K^2} - \frac{1}{\varepsilon - K^2} \right) \cos 2\theta \sin 2\psi \cos \varphi \right]$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2} \sin \theta \sin 2\psi (\Omega_1 - \Omega_2) + \tau \left(\left(\sin^2 \theta - K^2 \cos 2\theta \left(\frac{\cos^2 \psi}{\varepsilon^{-1} - K^2} + \frac{\sin^2 \psi}{\varepsilon - K^2} \right) \right) \cos \varphi + \frac{k^2}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon^{-1} - K^2} - \frac{1}{\varepsilon - K^2} \right) \cos \theta \sin 2\psi \sin \varphi \right)$$

$$\dot{\psi} = \cos \theta \left[\Omega_3 - \frac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2) - \frac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_2) \cos 2\psi \right] -$$

$$- \frac{\tau}{\sin \theta} \left[\left[\left[K^2 \cos^2 \theta \left(\frac{\sin^2 \psi}{\varepsilon^{-1} - K^2} + \frac{\cos^2 \psi}{\varepsilon - K^2} \right) - \sin^2 \theta \frac{\cos^2 \psi - \varepsilon^2 \sin^2 \psi}{1 - \varepsilon^2} \right] \sin \varphi - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k^2}{\varepsilon^{-1} - K^2} - \frac{k^2}{\varepsilon - K^2} \right) \cos 2\theta \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \sin^2 \theta \right] \cos \theta \sin 2\psi \cos \varphi \right]$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{s ds}{\sqrt{(\varepsilon + s)(\varepsilon^{-1} + s)^3(k^2 + s)^3}}$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{s ds}{\sqrt{(\varepsilon + s)^3(\varepsilon^{-1} + s)^3(k^2 + s)}}$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} K \int_0^\infty \frac{s ds}{\sqrt{(\varepsilon + s)^3(\varepsilon^{-1} + s)(k^2 + s)^3}}$$

Фазовая плоскость режимов поведения вихря во внешнем потоке с вертикальным сдвигом

$$\varepsilon(0) = 1, \theta(0) = 0$$

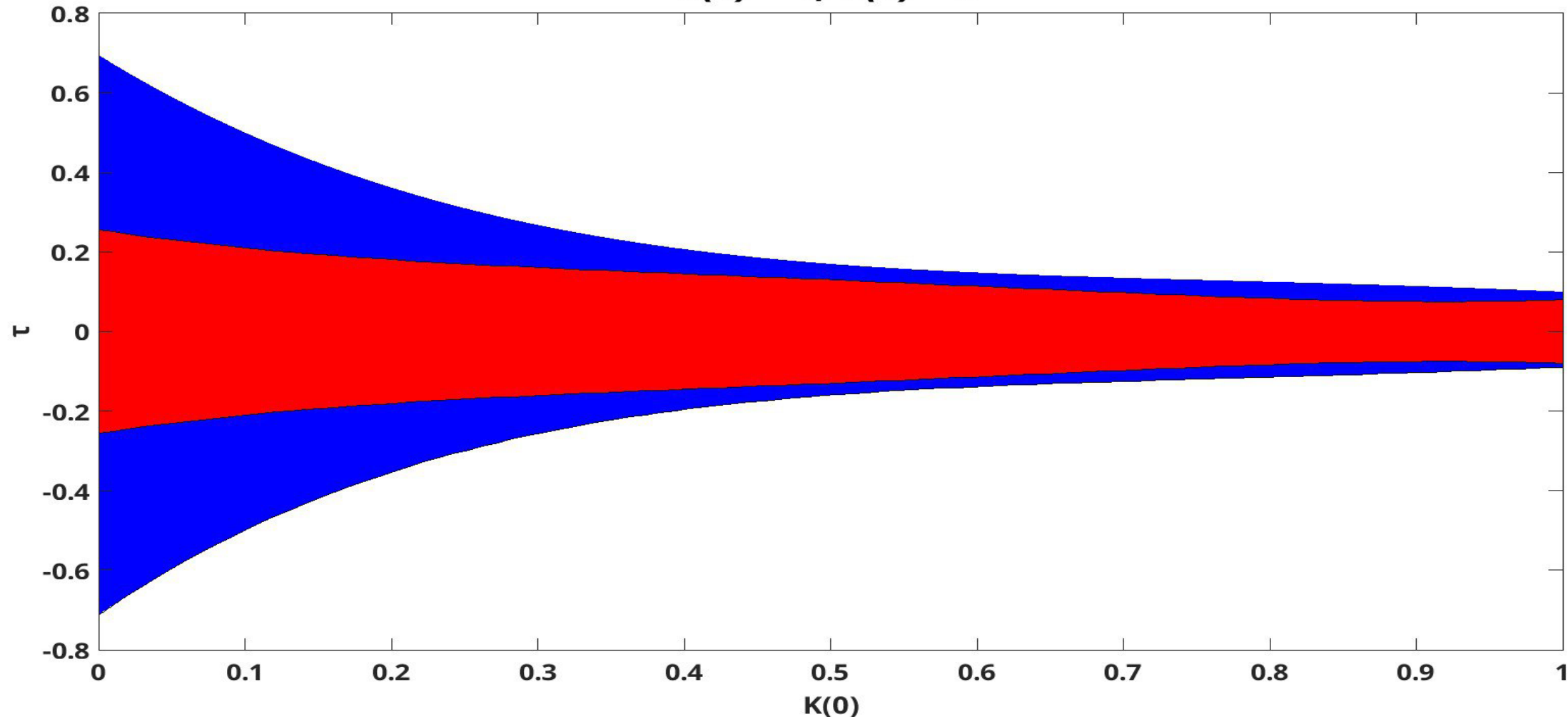


Рис.9. Кривые перехода между режимами поведения вихря в фазовой плоскости (K, τ) . Красная зона — зона выживания вихря, синяя зона — зона конечного времени жизни, белая зона — зона вытягивания

Фазовая плоскость режимов поведения вихря во внешнем потоке с вертикальным сдвигом

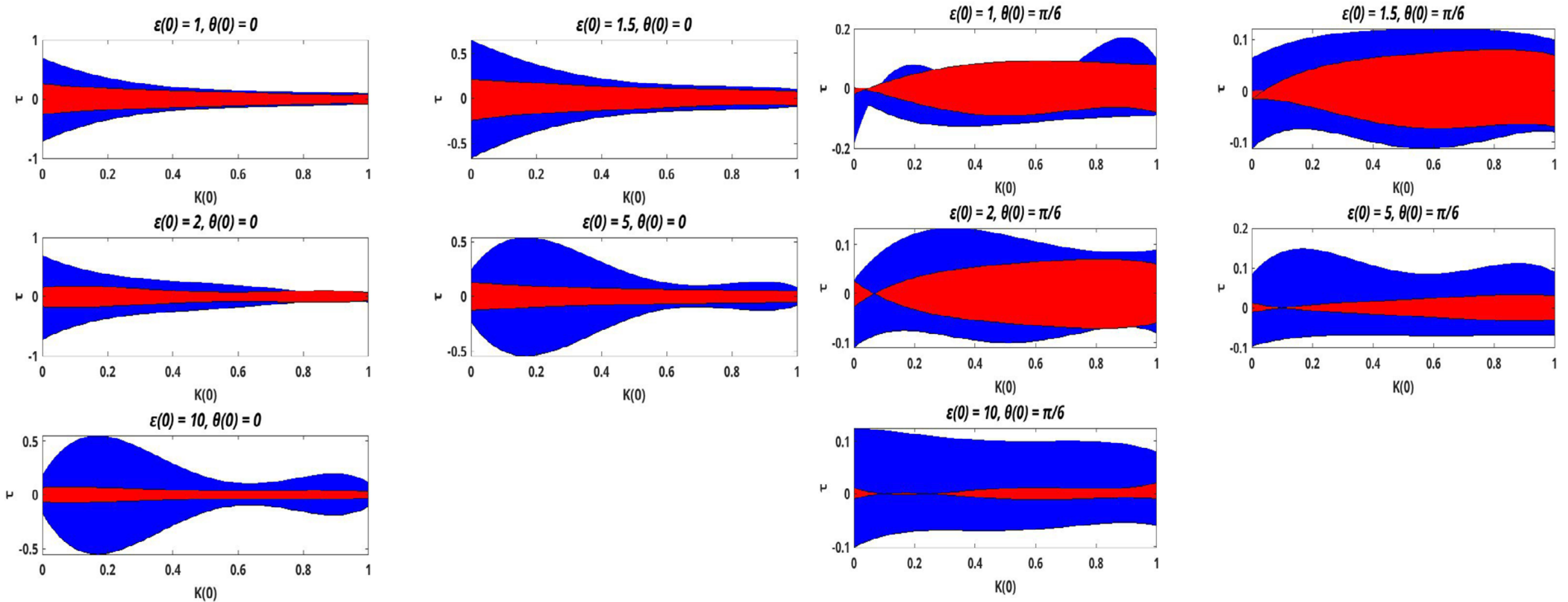


Рис.10. Кривые перехода между режимами поведения вихря в фазовой плоскости (K, τ) . Красная зона — зона выживания вихря, синяя зона — зона конечного времени жизни, белая зона — зона вытягивания

Фазовая плоскость режимов поведения вихря во внешнем потоке с вертикальным сдвигом

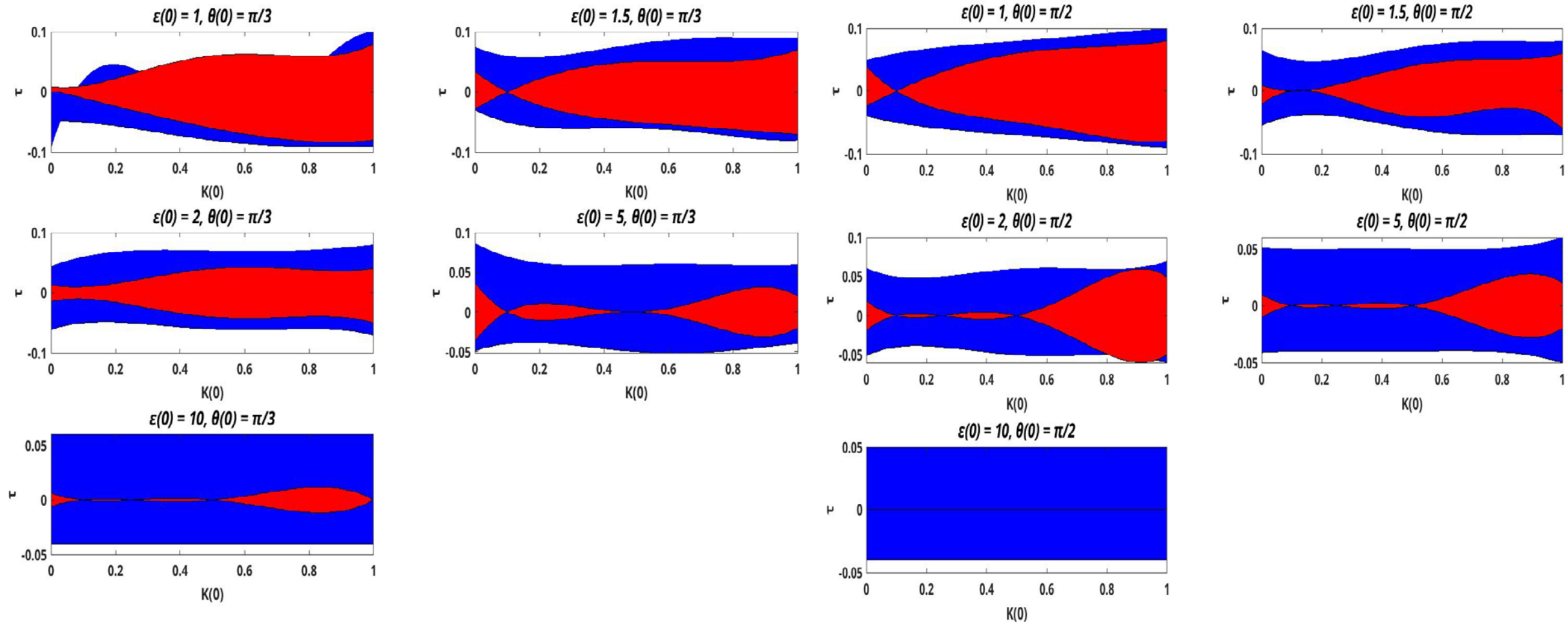


Рис.11. Кривые перехода между режимами поведения вихря в фазовой плоскости (K, τ) . Красная зона – зона выживания вихря, синяя зона – зона конечного времени жизни, белая зона – зона вытягивания.

Фазовая плоскость режимов поведения вихря во внешнем потоке с вертикальным сдвигом

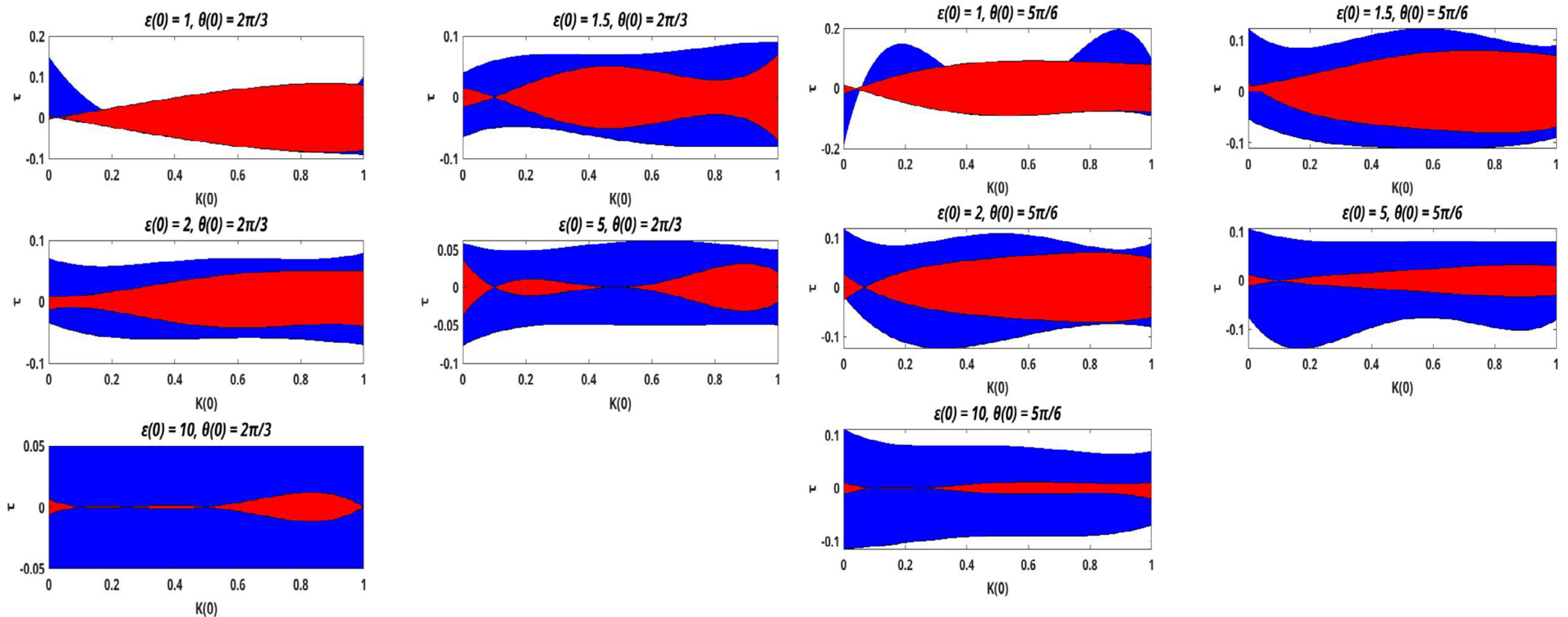


Рис.12. Кривые перехода между режимами поведения вихря в фазовой плоскости (K, τ) . Красная зона – зона выживания вихря, синяя зона – зона конечного времени жизни, белая зона – зона вытягивания.

Фазовая плоскость режимов поведения вихря во внешнем потоке с вертикальным сдвигом

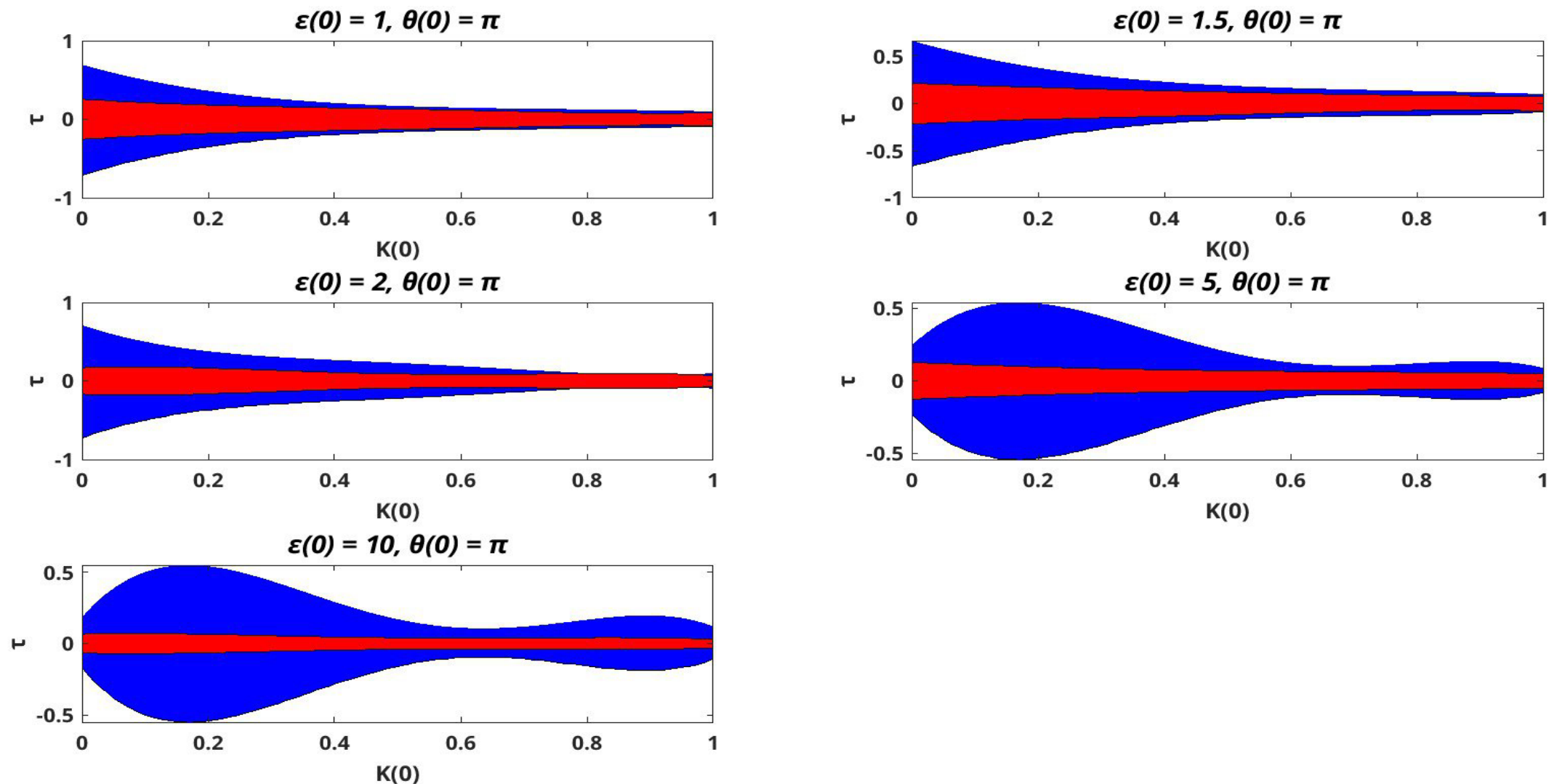


Рис.13. Кривые перехода между режимами поведения вихря в фазовой плоскости (K, τ) . Красная зона – зона выживания вихря, синяя зона – зона конечного времени жизни, белая зона – зона вытягивания.

Необходимое (но не достаточное) условие выживания вихря в течении

$$-0.25 < \frac{\Gamma}{\sigma} < 0.25$$

Эволюция параметров ядра

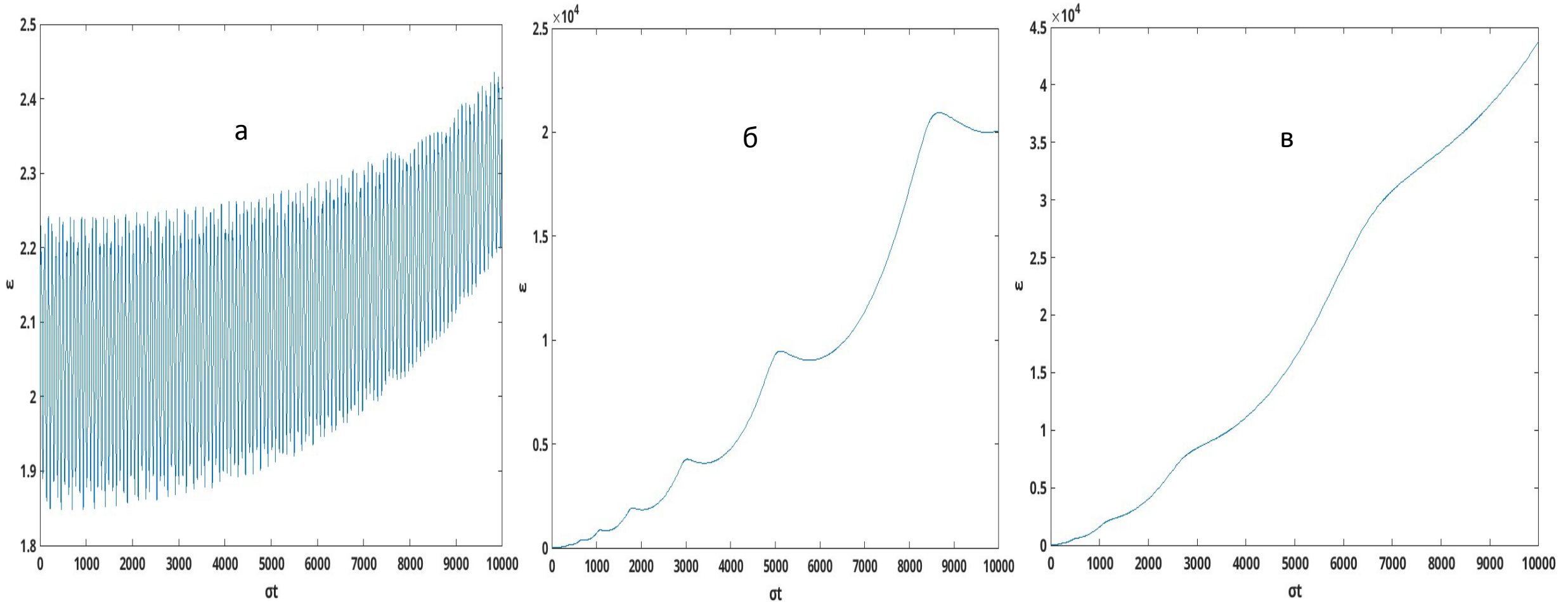


Рис.14. Эволюция параметра удлинения вихря ϵ в красной(а), синей(б) и белой(в) зонах при начальных параметрах $\epsilon(0)=2$, $K(0)=0.5$, $\theta(0)=\pi/3$ и параметрах сдвига $\tau=-0.01$ (а), $\tau=0.06$ (б), $\tau=0.1$ (в).

Эволюция параметров ядра

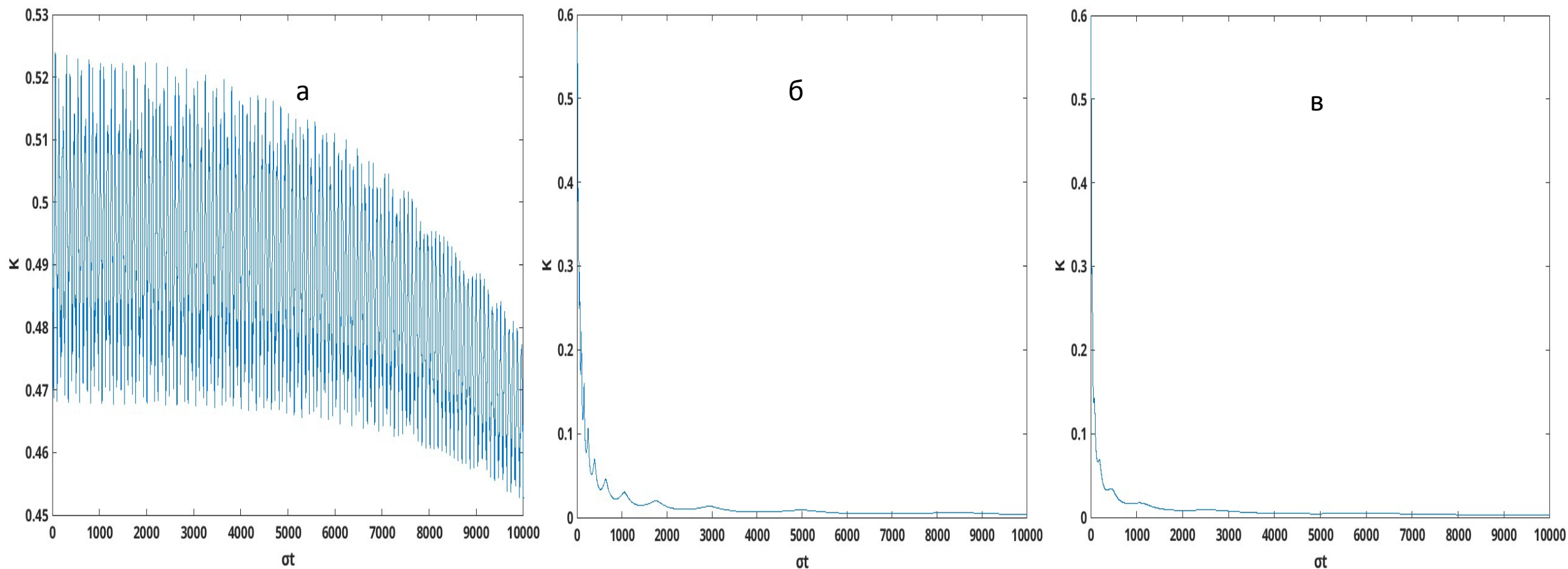


Рис.15. Эволюция параметра вытянутости вихря K в красной(а), синей(б) и белой(в) зонах при начальных параметрах $\varepsilon(0) = 2$, $K(0) = 0.5$, $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$ и параметрах сдвига $\tau = -0.01$ (а), $\tau = 0.06$ (б), $\tau = 0.1$ (в).

Эволюция параметров ядра

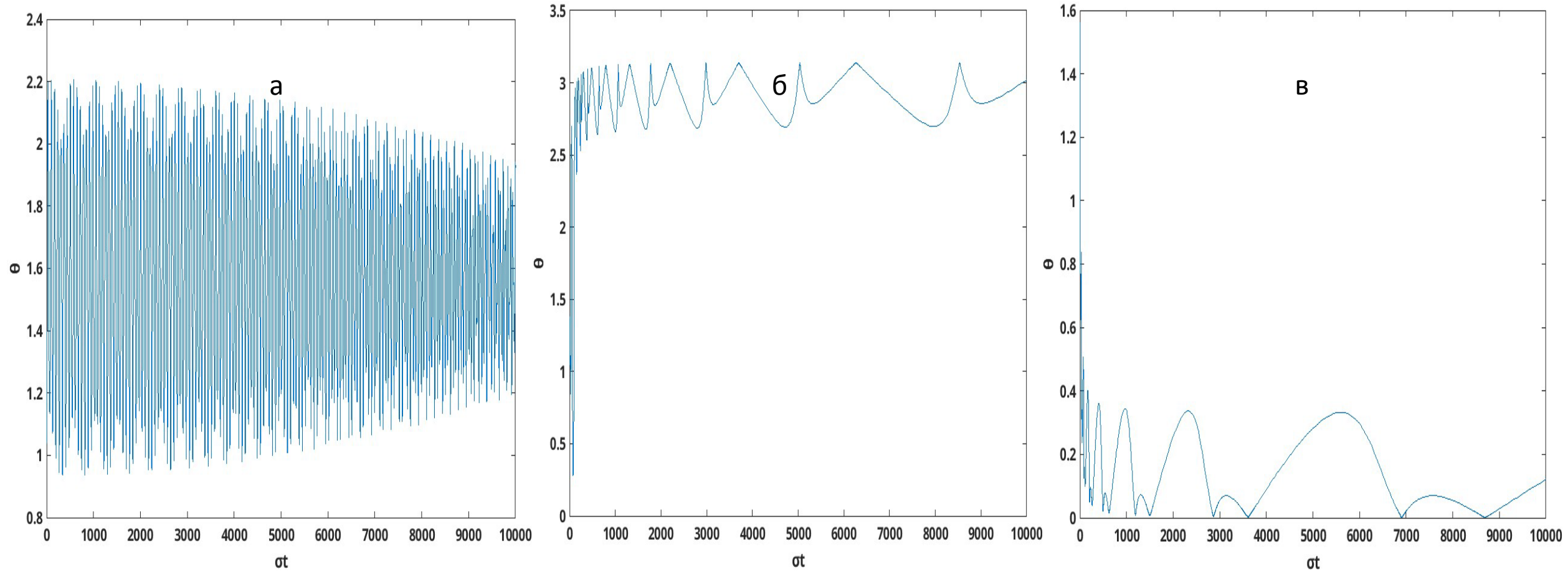
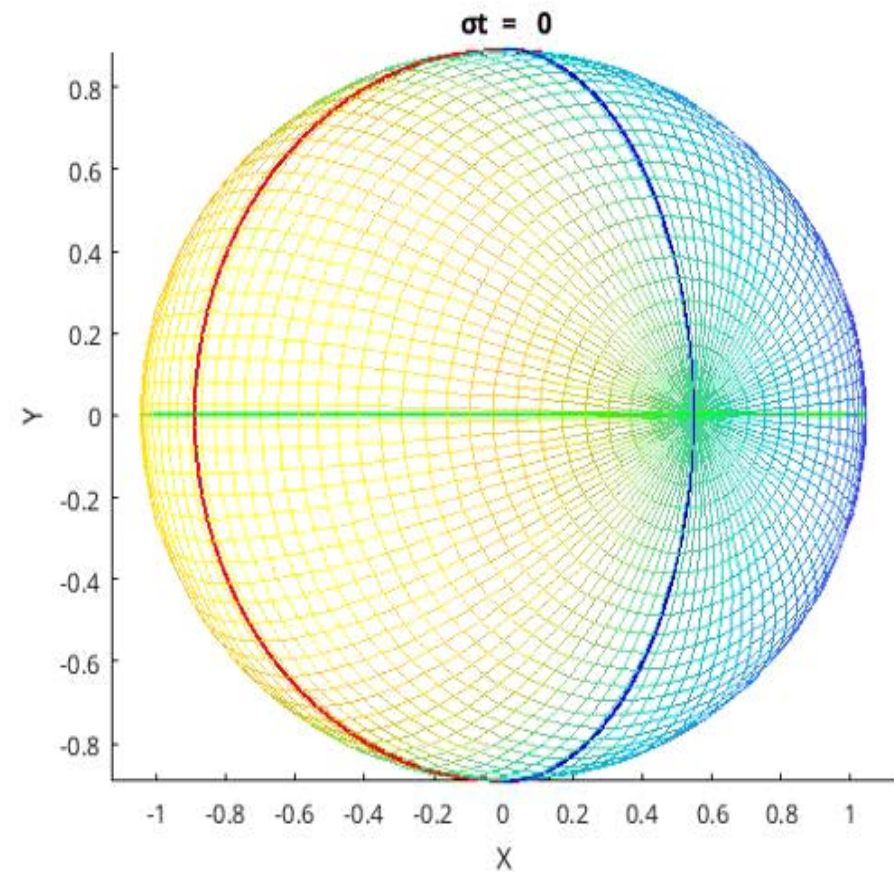
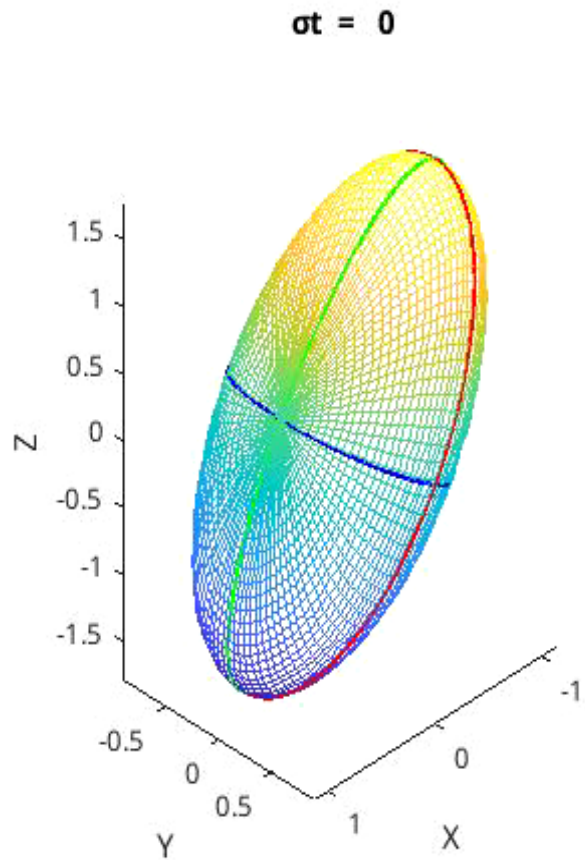


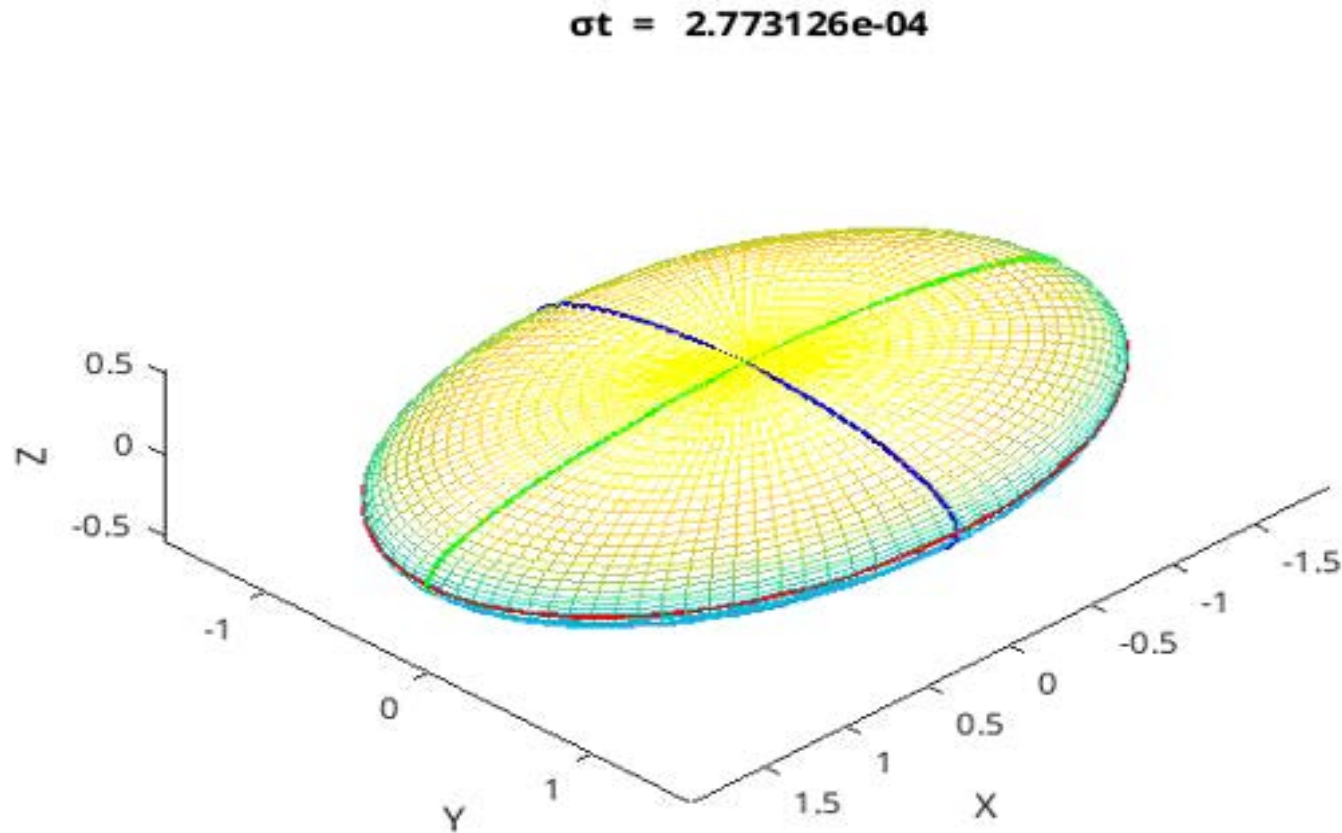
Рис.16. Эволюция угла нутации вихря θ в красной(а), синей(б) и белой(в) зонах при начальных параметрах $\varepsilon(0) = 2$, $K(0) = 0.5$, $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$ и параметрах сдвига $\tau = -0.01$ (а), $\tau = 0.06$ (б), $\tau = 0.1$ (в).

Эволюция вихревого ядра во внешнем потоке



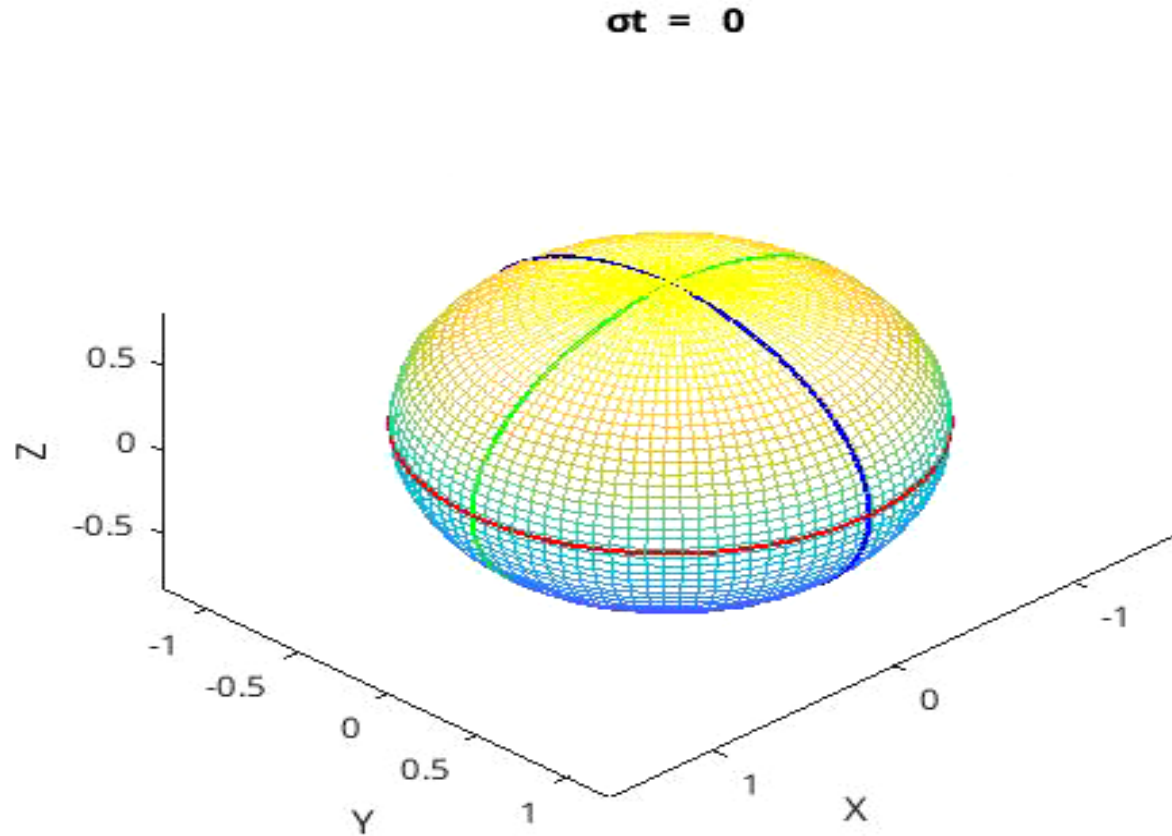
3D моделирование поведения ядра вихря в зоне конечного времени жизни (синяя зона) в пространстве XYZ(слева) и в плоскости XY(справа).

Эволюция вихревого ядра во внешнем потоке



3D моделирование поведения ядра вихря в пространстве в зоне выживания (красная зона)

Эволюция вихревого ядра во внешнем потоке



3D моделирование поведения ядра вихря в пространстве в зоне неограниченного вытягивания (белая зона)

Выводы

- Решена задача об эволюции эллипсоидального вихря в горизонтальном потоке с вертикальным сдвигом.
- Выявлено, что в зависимости от начальных и внешних условий существует три режима эволюции вихревого ядра : 1. Режим выживания, в котором вихрь может находиться сколь угодно долго, оставаясь в конечных размерах ядра. Этому режиму подчиняются самые сильные вихри. 2. Режим конечного времени жизни, в котором вначале вихрь ведет себя аналогично режиму выживания, но по истечению некоторого времени (времени жизни) вихрь неограниченно вытягивается , т.е. уничтожается течением. Этому режиму подвержены вихри послабее. 3. Режим неограниченного вытягивания, на котором вихрь уничтожается течением путем вытягивания вихревого ядра с самого начала его эволюции в течении. Этому режиму подчиняются самые слабые вихри.
- Режимы поведения на зависят от интегральных характеристик ядра вихря.
- На стадии неограниченного вытягивания ядро вихря стремится к горизонтальному положению. При этом горизонтальный размер ядра вдоль течения неограниченно нарастает, перпендикулярный течению горизонтальный остается конечной величиной, а толщина такого образования схлопывается до нуля. Такое образование теряет вихревые свойства и превращается в тонкую вертикальную структуру океана.