

# Турбулентность, Динамика Атмосферы и Климата



# Транзиентные моды в геофизической гидродинамике

О.Г. Чхетиани, Е.Б. Гледзер, М.В. Калашник

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова Российской академии наук Москва, 19 ноября 2024 г.

Одноволновые решения баротропных уравнений динамики атмосферы с монотонно меняющимся во времени волновым числом k получили в свое время название транзиентных. Впервые начали рассматриваться в 19-ом веке – Гельмгольц, Кельвин, Рэлей. В 60-х годах возникли в астрофизических задачах Голдрейх, Шуберт.

Вероятно, эти решения представляются наиболее простыми формулами, которые описывают решения уравнения Чарни-Обухова среди большого числа подходов и решений для сдвиговой гидродинамической неустойчивости с влиянием  $\beta$ -эффекта.

На роль подобных возмущений в развитии атмосферных циркуляций впервые внимание было обращено в [Farrell 1982]. С их возникновением стали связывать также неопределенности прогнозов [Buizza et al. 1995]. Почти 40 лет назад решения с меняющимся волновым числом, , появились при исследовании трёхмерной неустойчивости в неограниченных течениях

с эллиптическими линиями тока [Bayly 1986; Craik 1989], упоминались для неустойчивости в замкнутых эллипсоидальных объёмах в [Gledzer, Ponomarev 1992].

Развитие подхода при рассмотрении эволюции локализованного вихревого возмущения в эллиптическом течении было выполнено в цикле работ Шухмана и коллег.

Была обнаружена важная роль таких мод в задаче о циркуляции Хэдли с горизонтально неоднородным распределением температуры [Гледзер 2008].

Их привлекательность заключается в том, что эти решения точные для соответствующих уравнений движения и относительно просты для использования. Однако монотонность изменения волнового числа с возникновением волн как бы из ничего с последующим исчезновением затрудняет их интерпретацию для конкретных приложений.

Most models, including those mentioned above, have begun with the assumption of a perturbation of normal mode form or of infinitesimal amplitude so that normal mode structure prevails over the relevant time of the study. The original work of Charney and Eady cast the quasi-geostrophic equations into an eigenvalue problem and extracted only the exponentially growing and presumably negligible companion complex conjugate decaying modes. Suitably generalized to the flow in question, these were used as initial conditions in most subsequent studies. It has long been recognized (Orr, 1907; Case, 1960; Pedlosky, 1979) that the discrete normal modes do not form a complete set in the sense that an arbitrary initial condition cannot be expressed as a sum of

discrete normal modes of suitably chosen amplitude. This defect was traced to the neglect of the so-called continuous spectrum of neutral modes. These together with the discrete normal modes do in fact form a complete set for the canonical problems of Eady and Charney, as was shown by Pedlosky (1964) and Burger (1966), respectively.

On the Stability, or Instability, of certain Fluid Motions. By Lord RAYLEIGH, F.R.S., Professor of Experimental Physics in the University of Cambridge.

1879

XLIII. On Discontinuous Movements of Fluids.

By Professor Helmholtz\*.

1868

XLVI. Hydrokinetic Solutions and Observations.

By Sir William Thomson, F.R.S.\*

Part I. On the Motion of Free Solids through a Liquid. 1871

# **Динамика и блокирование волн Россби в квазидвумерных сдвиговых течениях**

Уравнение Обухова-Чарни – медленные квазидвумерные движения вращающейся планетной атмосферы толщины D в окрестности широты  $\theta=\theta_0$ .

Квазигеострофический вариант уравнения переноса потенциальной завихренности Q, в приближении  $\beta$ - плоскости для движений с числом

Россби 
$$\mathrm{Ro} = \frac{U_0}{f_0 L} \! \ll \! 1$$
, (Обухов 1949, Педлоски 1984, Незлин, Снежкин

1990, Должанский 2011)

$$Q_t + J(h,Q) = 0, \quad Q = B\Delta h - h + \beta y. \tag{1}$$

Масштабы 
$$x,y,t$$
 -  $L,L,\frac{L}{U_0}$ ,  $B=\left(\frac{L_R}{L}\right)^2$  число Бургера,

$$L_{\!\scriptscriptstyle R} = \! rac{ig(gDig)^{\!\scriptscriptstyle 1/2}}{f_0}$$
– радиус деформации Россби,

h - отклонение толщины атмосферы от невозмущенного значения D ,

нормированное на 
$$\dfrac{f_0LU_0}{g}$$
.  $\beta=\dfrac{eta_0L_R^2}{U_0}$ , где  $eta_0=(2\mathbf{\Omega}\,/\,r_0)\cos heta_0$ .

$$D=8$$
 км, на широте  $30^{\circ}~f_0=10^{-4}~{\rm c}^{-1}$ ,  $eta_0=2\cdot 10^{-11}{\rm m}^{-1}{\rm c}^{-1}$ .

Соответственно  $L_{\rm R}=2800$  км и  $\beta=5.2$  (при  $U_0=30$  м/с).

Если  $B \ll 1$  основной вклад в потенциальную завихренность дает изменение h , если  $B \gg 1$  – относительный вихрь.

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0, \ E = \frac{1}{2} \iint \left( B(\nabla h)^2 + h^2 \right) dx dy. \tag{2}$$

Рассматриваем возмущения зонального течения с постоянной фоновой скоростью U и горизонтальным сдвигом S .

$$\overline{h}(y) = -Uy - Sy^2 / 2, \overline{U}(y) = -\overline{h}_y = U + Sy.$$
 (3)

При 
$$S=0$$
, - точное решение  $h=A\exp\Bigl(i\Bigl(k_{_{X}}x+k_{_{Y}}y-\omega t\Bigr)\Bigr)$ ,

Волна Россби с дисперсионным соотношением

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) = \frac{UBk^2 - \beta}{1 + Bk^2} k_x, \tag{4}$$

Для потока с востока (U < 0), зональная фазовая скорость  $\frac{\omega}{k_{_{X}}} < 0$ , т.е.

волна всегда распространяются на запад. В случае западного потока

$$(U>0)$$
 существует граничное значение  $k=k_b=\left(rac{eta}{UB}
ight)^{\!\!1/2},$ 

при  $k > k_b$  фаза волны распространятся на восток, при  $k < k_b$  на запад.

Волна с  $k=k_b$  остается **неподвижной** или **блокированной** в потоке.

При U=1 размерная длина блокированной волны

$$\lambda_b = L \frac{2\pi}{k_b} = 2\pi \left(\frac{U_0}{\beta_0}\right)^{1/2}$$

Для земной атмосферы при  $U_0=10\,$  м/с, длина волны  $\lambda_b=5400\,$  км, если  $eta_0$  вычисляется на широте  $heta_0=45^\circ$  .

В два раза превышает радиус деформации.

Ищем точное решение уравнения в форме плоской волны с переменной амплитудой и меридиональным волновым числом, зависящим от времени

$$h = A(t) \exp i \left( k_x x + k_y(t) y \right)$$

Для такого решения двумерный якобиан обращается в ноль и для волнового вектора и амплитуды:

$$(1+Bk^{2}(t))\frac{dk_{y}}{dt} + BSk^{2}(t)k_{x} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}[(1+Bk^{2}(t))A] - ik_{x}(\beta - BUk^{2}(t))A = 0.$$

Для определенности далее будем рассматривать случай положительного значения сдвига S>0, т.е., случай когда у зонального течения есть антициклонический сдвиг. Переходя к новому времени au=St

и определяя переменную 
$$q( au) = \frac{k_y( au)}{k_x}$$
, перепишем как

$$\begin{split} \Big(1 + B_*(1 + q^2(\tau))\Big) \frac{dq}{d\tau} + B_*(1 + q^2(\tau)) &= 0, \\ \frac{d}{d\tau} \Big[ \Big(1 + B_* \kappa^2(\tau)\Big) A \Big] - i\beta_* \Big(1 - U_* \kappa^2(\tau)\Big) A &= 0. \\ \kappa^2(\tau) &= 1 + q^2(\tau) \\ B_* &= Bk_x^2, \, \beta_* = \frac{\beta k_x}{\varsigma}, \, U_* = \frac{B_* U}{\beta}. \end{split}$$

Интегрирование дает неявную зависимость меридионального волнового числа от времени

$$B_*^{-1} \arctan(q(\tau)) + q(\tau) = \tau_m - \tau, \tau_m = B_*^{-1} \arctan(q(0)) + q(0).$$

Откуда

$$A(\tau) = A(0) \frac{1 + B_* \kappa^2(0)}{1 + B_* \kappa^2(\tau)} \exp i(\varphi(\tau) - \varphi(0)),$$

$$\varphi(\tau) = \frac{\beta_*}{B_*} (U_* q(\tau) - \arctan(q(\tau))).$$

Для h

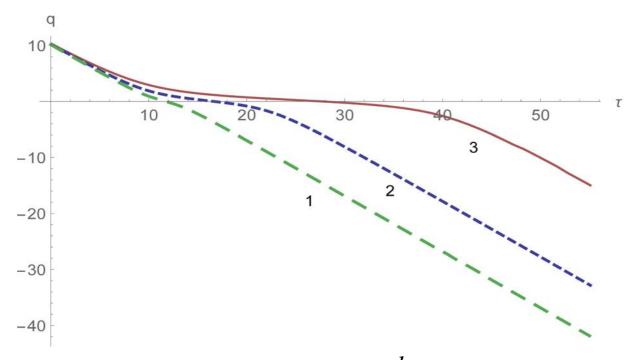
$$h(\tau) = A(0) \frac{1 + B_* \kappa^2(0)}{1 + B_* \kappa^2(\tau)} \exp(i\Theta(\tau)), \Theta = k_x x + k_y(\tau) + \varphi(\tau) - \varphi(0).$$

 $\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta}(x,y,\tau)$  определяет полную фазу волны.

Точное решения уравнения Обухова-Чарни.

Произведя усреднение по фазе, для полной энергии волны  $E = \left\langle B(\nabla h)^2 + h^2 \right\rangle / 2$ 

$$E(\tau) = E(0) \frac{1 + B_* (1 + q^2(0))}{1 + B_* (1 + q^2(\tau))},$$

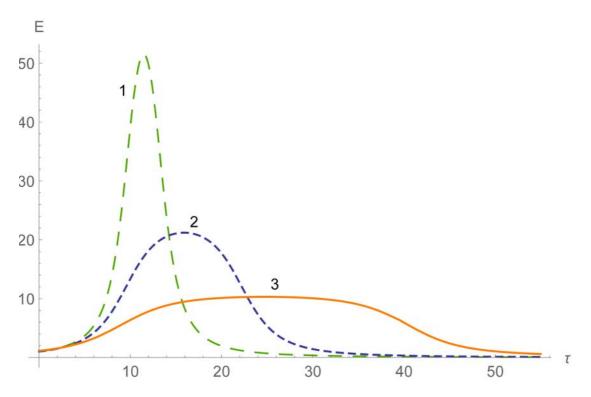


Зависимость волнового числа  $q=\frac{k_y}{k_x}$  от времени au=St для трех значений  $B_*$  - 1)  $B_*=1$ ; 2)  $B_*=0.25$ ; 3)  $B_*=0.1$ .

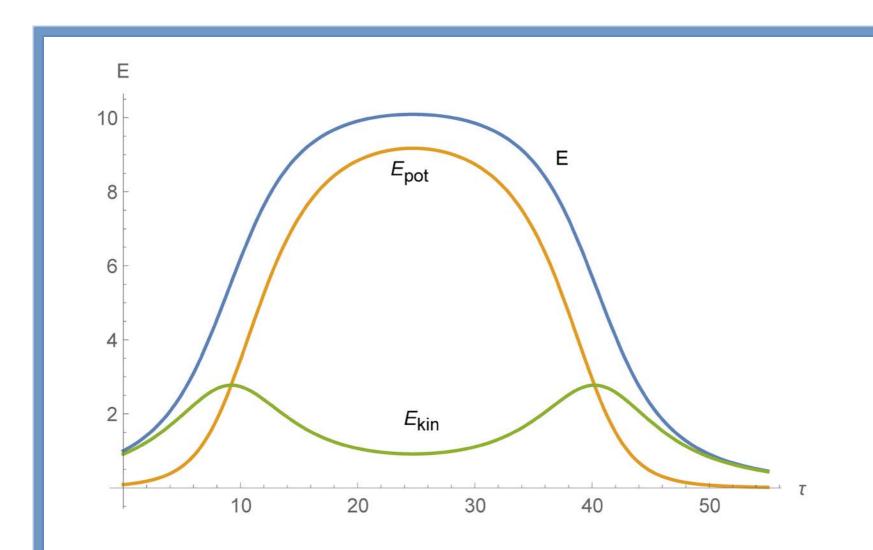
Совершенно иной тип поведения имеет место в случае  $B_* \ll 1$ , когда эффект деформации свободной поверхности становится преобладающим. В этом случае на графике зависимости волнового числа  $q(\tau)$  от времени появляется достаточно длительный квазистационарный участок, на котором  $q(\tau)$  близко к нулю (рис.1). Соответствующий этому (также достаточно длительный) квазистационарный участок появляется и на графике зависимости от времени полной энергии  $E(\tau)$ , причем на этом участке энергия близка к своему максимальному значению

$$E_m = E(0) \frac{1 + B_* (1 + q^2(0))}{1 + B_*},$$

достигаемому в момент времени  $\tau_m = q(0) + B_*^{-1} \arctan(q(0))$ .



Зависимость полной энергии возмущения от времени au=St для трех значений  $B_*\colon 1\text{-}2\text{-}3\colon B_*=1 \to 0.25 \to 0.1.$ 



- В существующих работах по исследованию динамики волн Россби, как правило пренебрегают эффектом деформации свободной поверхности или, что эквивалентно, трехмерным растяжением вихревых трубок.
- Учет этого фактора оказывается существенным при наличии сдвиговых течений.
- Он приводит к появлению длительной квазистационарной стадии эволюции волны, при которой полная энергия практически не меняется со временем.
- При определенных начальных условиях на данной стадии происходит эффективная амплитудная и фазовая блокировка волны в сдвиговом течении.
- Описанный механизм блокировки на основе класса точных решений Обухова-Чарни, дополняет другие известные механизмы.

## Класс точных решений для пограничных бароклинных волн.

Пограничные бароклинные волны (edge baroclinic waves) формируются в геострофическом течении с вертикальным сдвигом вблизи твердой поверхности.

- 1. При характерных для атмосферы значениях сдвигов, параметры волн хорошо согласуются с параметрами атмосферных вихревых образований (циклонов и антициклонов).
- 2. Классическую проблему бароклинной неустойчивости в присутствии двух границ (подстилающей поверхности и тропопаузы) удается сформулировать в терминах взаимодействия пограничных волн.
- 3. Пограничные бароклинные волны, таким образом, образуют базис, участвующий в формировании структуры неустойчивых возмущений.

В квазигеострофическом приближении движения стратифицированной вращающейся атмосферы с постоянной частотой плавучести N и инерционной частотой f описываются уравнением переноса потенциальной завихренности:

$$q_t + uq_x + vq_y = 0, \quad q = \Delta_2 \psi + \delta^{-2} \psi_{zz}, \quad \delta = N / f.$$
 (1)

На твердой горизонтальной границе z=0 должно выполняться условие

$$z = 0$$
:  $\sigma_t + u\sigma_x + v\sigma_y = 0$ ,  $\sigma = f\psi_z$ . (2)

Распределения скорости и плавучести в этом течении связаны уравнением термического ветра

$$f \partial \overline{u} / \partial z + \partial \overline{\sigma} / \partial y = 0$$
.

Рассматриваем  $\psi = \overline{\psi}(y,z)$  для которых распределение PV  $q = \overline{q}(z)$  зависит только от вертикальной координаты.

Для возмущений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)q + \left[\psi, q\right] = 0,\tag{3}$$

с граничным условием

$$z = 0: \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left[\psi, \frac{\partial \psi}{\partial z}\right] = 0. \tag{4}$$

Уравнению (3) для отклонения удовлетворяют решения с нулевой PV

$$q = \Delta_2 \psi + \delta^{-2} \psi_{zz} = 0. \tag{5}$$

• Периодические по горизонтальным координатам решения (5), удовлетворяющие условию (4) и условию затухания при  $z \to \infty$ , будем называть **пограничными** бароклинными волнами или просто бароклинными волнами.

Трехпараметрическое распределение

$$\overline{\psi} = -(Ayz + 0.5By^2 + 0.5Cy^2z).$$
 (6)

Зональная скорость и плавучесть

$$\overline{u} = -\overline{\psi}_y = Az + By + Cyz, \ \overline{\sigma} = f\overline{\psi}_z = -f(Ay + 0.5Cy^2), \quad (7)$$

горизонтальный и вертикальный сдвиг скорости течения

$$\overline{u}_{v} = B + Cz$$
,  $\overline{u}_{z} = A + Cy$ .

PV течения  $\overline{q} = -(B + Cz)$ 

• Распределение (6) обобщение распределения для течения Иди  $\overline{\psi} = -Ayz$ , для течений с горизонтальными и вертикальными сдвигами.

Точное решение в форме локализованной у поверхности волны с переменными параметрами

$$\psi = a(t)\exp(-\delta \kappa(t)z)\cos(kx + l(t)y - p(t)). \tag{9}$$

- a(t) и l(t) переменные амплитуда и меридиональное волновое число,
- $\kappa^2(t) = k^2 + l^2(t)$  квадрат модуля волнового вектора  ${\bf k}(t)$ ,
- p(t) фазовая функция, связанная с локальной частотой волны  $\omega(t)$  соотношением  $\omega(t) = dp \, / \, dt$  .

• Вертикальный масштаб волны (масштаб локализации у поверхности)  $h(t) = 1 / \delta \kappa(t)$ .

Уравнения для параметров волны

$$\frac{d}{dt}\left(\kappa(t)a(t)\right) = 0, \quad \frac{dl}{dt} + Bk + C\delta^{-1}\frac{k}{\kappa(t)} = 0, \quad \frac{dp}{dt} - A\delta^{-1}\frac{k}{\kappa(t)} = 0. \quad (10)$$

• Основной интерес представляет уравнение для меридионального волнового числа. Обозначая  $r(t) = l(t) \, / \, k$ , его можно записать в виде

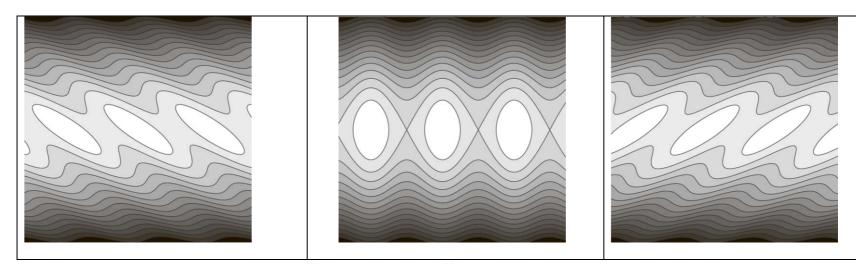
$$\frac{dr}{dt} + B + \frac{C\delta^{-1}}{k\sqrt{1+r^2}} = 0. {(11)}$$

После нахождения из (11) l(t), далее находится  $\kappa(t)$  и локальная частота  $\omega(t) = A\delta^{-1}k \, / \, \kappa(t)$ . Согласно первому уравнению (11) амплитуда волны  $a(t) = c \, / \, \kappa(t)$ , где  $c = a(0)\kappa(0)$ .

Бароклинная волна (9) - точное решение уравнений динамики для возмущений.

- период составляет порядка 8 суток
- меридиональное волновое число l(t) = l(0) Bkt линейно зависит от времени. Транзитивный рост энергии волны на начальном этапе (порядка суток).
- Аналогично полной энергии ведет себя вертикальный масштаб волны на больших временах волна прижимается к поверхности.

• Представляет интерес распределение полной функции тока  $ar{\psi} + \psi$  ,



Теневая картина изолиний поля полной функции тока для трех моментов времени au=0,1,2 .

• Представленный анализ фактически описывает новый сценарий формирования вихревых дорожек в сдвиговых потоках, связанный с присутствием бароклинных волн.

- Учет горизонтального сдвига приводит к появлению новых особенностей волновой динамики.
- К ним относятся немодальный рост энергии на начальном этапе развития, зависимость от времени вертикального масштаба волны, возможность образования неподвижных или блокированных волн.
- Горизонтальный сдвиг скорости усиливает эффективность механизма генерации бароклинных волн начальными вихревыми возмущениями.
- Наложение бароклинной волны на поток с горизонтальным сдвигом приводит к формированию вихревых цепочек, достаточно часто наблюдающихся в атмосфере.
- Здесь следует подчеркнуть, что изучение динамики бароклинных волн стимулируется проблемой описания различных сценариев внетропического циклогенеза.

### Оптимальные возмущения в линейной задаче Иди

Под оптимальными возмущениями в линейной теории гидродинамической неустойчивости понимаются возмущения с максимумом скорости роста энергии или отношения конечной и начальной энергий.

$$\overline{\varphi}^{x} = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \varphi dx, \ \langle \varphi \rangle \equiv \int_{0}^{1-x} \varphi dz, \ \varepsilon = 0.5 (\psi_{x}^{2} + \psi_{z}^{2}), E = \langle \varepsilon \rangle \equiv \int_{0}^{1} \overline{\varepsilon}^{x} dz$$

$$\varepsilon_{t} = (\psi \psi_{xt})_{x} + (\psi \psi_{zt})_{z} - \psi q_{t}$$
,  $q = \psi_{xx} + \psi_{zz}$ 

Баланс энергии для возмущений с нулевым значением PV

$$\left. \frac{dE}{dt} = \overline{\psi_x \psi_z}^x \right|_{z=1}.$$

Полное изменение энергии определяется меридиональным потоком плавучести на верхней границе.

Для двумерных возмущений с равными граничными амплитудами функция потока определяется выражением

$$\psi = r\rho(t) \Big( \cosh(kz) \cos(kx + \varphi_2(t)) - \cosh(k(z-1)\cos(kx + \varphi_1(t))) \Big), \quad r = (k\sinh k)^{-1}.$$

Для полной энергии и ее производной

$$\left. \frac{dE}{dt} = \overline{\psi_x \psi_z}^x \right|_{z=1} = \frac{1}{2} \sinh^{-1} k \rho^2(t) \sin \varphi(t),$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\langle \psi_x^2 + \psi_z^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\coth k}{k} \rho^2(t) \Big( 1 - \cosh^{-1} k \cos \varphi(t) \Big).$$

Полная энергия увеличивается, если фазовый сдвиг  $0 < \varphi < \pi$ . Только при таком сдвиге фаз возмущение способно отбирать энергию сдвигового потока.

$$\gamma = \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{k \sin \varphi}{\cosh k - \cos \varphi}.$$

Т.к.  $\gamma>0$  при  $0<\varphi<\pi$  and на границах интервала, существует значение  $\varphi=\varphi_{opt}$ , при котором  $\gamma(k,\varphi)$  достишает максимума./то значение соответствует начальному оптимальному возмущению  $\cos\varphi_{opt}=\cosh^{-1}(k), \gamma_{opt}=\gamma(k,\varphi_{opt})=k/\sinh(k)$ .

Проведено сравнение параметров оптимальных возмущений с параметрами растущих нормальных мод. Установлено, что существует только одна экспоненциально нарастающая нормальная мода, которая является оптимальным возмущением. Волновое число этой моды при этом отлично от волнового числа нормальной моды с максимумом инкремента нарастания.

Рассматривались возмущения с PV q=0. В случае  $q \neq 0$  появится интегральный вклад мод непрерывного спектра (сингулярных мод). Взаимодействие мод дискретного и непрерывного спектра может приводить к появлению новых особенностей динамики возмущений, в частности, к эффекту резонансного возбуждения бароклинных волн сингулярными распределениями PV.

### Учёт рельефа и бароклинности

Уравнение для потенциального вихря с учётом рельефа h(x,y) для слоя  $H_0$  с бета-эффектом в баротропном приближении имеет вид (см. [Должанский 2011; Cushman-Roisin, Beckers 2009]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \Delta \psi - \frac{1}{L_0^2} \psi \right) + \left[ \psi, \Delta \psi \right] + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{f_0}{H_0} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{f_0}{H_0} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \Psi,$$
(3)

где  $f_0 = 2\mathbf{\Omega}_0 \sin \varphi$ ,  $\varphi$  — широта местности; входит отношение рельефа h к толщине однородного по температуре слоя  $H_0$ .

Рельеф зададим в форме

$$\frac{f_0}{H_0}h(x,y) = \delta y + \varepsilon x + \gamma y^2 / 2,$$

со склонами  $\delta$ ,  $\varepsilon$  (размерность 1/(м c)) по координатам y, x и со сдвигом наклона  $\gamma$  (размерность  $1/(\text{м}^2 \text{ c})$ ).

Функция тока

$$\psi = -U_0 y - Sy^2 / 2 + V_0 x + a(t)\cos(f) + b(t)\sin(f), f = k_x x + k_y(t)y,$$

где  $U_0$ ,  $V_0$  — постоянные величины, задающие скорости по осям x,y, сдвиг скорости S . Заметим, что параметры S и  $\gamma$  задают сдвиги скорости и наклона рельефа.

Внешнее действие  $\Psi$  (влияние внешних факторов) задаём в линейной форме  $\Psi = F + \Gamma y$ . Здесь формально включен постоянный источник потенциального вихря, а также добавка, линейно зависящая от широты y.

В итоге 
$$\gamma V_0 + \varepsilon S = \Gamma, (\beta + \delta)V_0 + \varepsilon U_0 = F,$$

$$\begin{split} &\left(k^{2} + \frac{1}{L_{0}^{2}}\right) \frac{dk_{y}(t)}{dt} + (Sk^{2} - \gamma)k_{x} = 0, k^{2}(t) = k_{x}^{2} + k_{y}^{2}(t), \\ &\frac{d\left[(k^{2} + 1/L_{0}^{2})a(t)\right]}{dt} + b(t)Q = 0, \frac{d\left[(k^{2} + 1/L_{0}^{2})b(t)\right]}{dt} - a(t)Q = 0, \\ &Q = qk_{x} + pk_{y}(t), q = k^{2}U_{0} - \beta - \delta, p = k^{2}V_{0} + \varepsilon. \end{split}$$

Есть стационарное решение  $k^2 = \frac{\gamma}{\varsigma}$ ,

Исходным для учёта бароклинности (без рельефа) является уравнение сохранения потенциального вихря  $\Pi$ :

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Omega}_z + f_0 + \frac{g}{\rho f_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f_0^2}{N^2} \rho \frac{\theta}{\mathbf{\Theta}_z} \right), N^2 = \frac{g}{\mathbf{\Theta}_z} \frac{d\mathbf{\Theta}_z}{dz}, (16)$$

heta — отклонение потенциальной температуры:  $m{\Theta} = m{\Theta}_z(z) + m{ heta}$ . Предположим, что имеется не только равновесная потенциальная температура  $m{\Theta}_z$ , но и некоторая фоновая потенциальная температура.

Зависимость от предыдущих микрорельефных и температурных условий,  $\theta = \theta_f + \theta'$ ,  $\Theta_z$  и  $\theta_f$  от вертикальной координаты z зависят линейно:

$$\mathbf{\Theta}_{z} = \mathbf{\Theta}_{z}^{0} \cdot z + const, \mathbf{\Theta}_{z}^{0} = const,$$
  
$$\mathbf{\Theta}_{f} = \mathbf{\Theta}_{f}^{0}(x, y) \cdot z + const,$$

Тогда добавка в потенциальном вихре

$$\frac{g}{\rho f_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f_0^2}{N^2} \rho \frac{\theta_f}{\mathbf{\Theta}_z} \right) = f_0 \frac{\partial \theta_f / \partial z}{\partial \mathbf{\Theta}_z / \partial z} = f_0 \frac{\theta_f^0(x, y)}{\mathbf{\Theta}_z^0},$$

аналогична члену  $-f_0 rac{h}{H_0}$  в потенциальном вихре при учёте рельефа

$$\mathbf{\Pi}_r = \mathbf{\Omega}_z + f_0 - f_0 \frac{h}{H_0}.$$

Влияние бароклинности сводится к уравнению для рельефа  $h_{\scriptscriptstyle f}$  .

$$f_0 \frac{h_f}{H_0} = -f_0 \frac{\overline{\theta_f^0(x, y)}}{\mathbf{\Theta}_z^0} = \delta_f y + \varepsilon_f x + \gamma_f y^2 / 2.$$

- Учёт рельефа или расслоенности геофизических течений со сдвигом скорости может оказать стабилизирующее влияние на масштаб возникающей в потоке волны.
- Необходимое условие для этого устойчивость соответствующих решений уравнений.
- При согласовании сдвигов скорости и наклонов рельефа с их средними значениями возможно блокирование образование стоячей волны.
- Для волны с фиксированной частотой реализуется бимодальность: два решения с отличающимися зональной и меридиональной картинами поля скорости.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного Фонда (проект 23-17-00273).

### Литература

- Гледзер Е.Б. *Параметры подобия и центробежная конвективная неустойчивость горизонтально неоднородных циркуляций типа Хэдли* // Изв. РАН. ФАО. 2008. Т.44. № 1, С. 36-47.
- Чхетиани О.Г., Калашник М.В., Чагелишвили Г.Д. *Динамика и блокирование волн Россби в квазидвумерных сдвиговых течениях*. Письма в ЖЭТФ. Т. 101(2). С. 84-89. 2015.
- Калашник М.В., Чхетиани О.Г., Чагелишвили Г.Д. *Новый класс краевых бароклинных волн и механизм их генерации.* Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. Т. 54. № 4. С. 361-370. 2018.
- Kalashnik M.V. Chkhetiani O.G. An analytical approach to the determination of optimal perturbations in the Eady model. J Atmos. Sci. Volume: 75 Issue: 8 P. 2741-2761 2018.
- Калашник М.В., Чхетиани О.Г. *Оптимальные возмущения с нулевой потенциальной завихренностью в модели Иди*. Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. Т. 54. № 5. С. 487-496. 2018.
- Гледзер Е.Б., Гледзер А.Е., Чхетиани О.Г. Стабилизация волновых возмущений в геострофическом потоке с горизонтальным сдвигом при учёте рельефа и бароклинности (направлено в ФАО).

