

V Всероссийская конференция с международным участием

Турбулентность, динамика атмосферы и климата

Посвященная памяти академика Александра Михайловича Обухова

**ЭМПИРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ
КОЛЕБАНИЯ ЭЛЬ-НИНЬО:
СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИИ
СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

**А. Ф. Селезнев, А. С. Гаврилов, Д.Н. Мухин,
Е.М. Лоскутов, А.М. Фейгин**

Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород

20 ноября 2024 г.

Структурная устойчивость (грубость) динамических систем

Динамическая система (ДС) - математическая модель эволюционных процессов:

$$(M, \varphi^t)$$

M - множество всевозможных состояний процесса (фазовое пространство)

$\varphi^t : M \rightarrow M$ - оператор эволюции состояний

Задание ДС в виде системы ОДУ:

$$\frac{d\varphi^t x}{dt} = F(\varphi^t x)$$

Структурная устойчивость ДС (Андронов и Понтрягин, 1937) - устойчивость разбиения (топологической структуры) ее фазового пространства на траектории по отношению к малым изменениям правой части

Бифуркация - нарушение структурной устойчивости ДС, которое приводит к качественному изменению режима ее поведения (критические переходы, катастрофы)

Развитие представлений о структурной устойчивости ДС

- **Андронов и Понтрягин (1937), Пейшото (1962)** - условия структурной устойчивости двумерных ДС, *типичность грубых двумерных ДС*
- **Смейл, Аносов и др. (1960е-70е)** - условия структурной устойчивости многомерных ДС, гиперболическая теория, *нетипичность грубых многомерных ДС*
- **Шильников, Вильямс, Синай и др. (1980е-90е)** - квазиаттракторы, понятие псевдогиперболичности

Исследование структурной устойчивости кардинально усложняется с ростом размерности ДС

Структурная устойчивость (грубость) динамических систем

Динамическая система (ДС) - математическая
модель

M - множество
(фазовое пространство)

$$\varphi^t : M \rightarrow M$$

Задач

✓ Возможно ли исследование структурной устойчивости
бесконечномерных ДС?
(пространственно-распределенных систем, таких как
климатическая система?)

✓ Возможно, если удастся построить адекватное
конечномерное (низкоразмерное!) описание
бесконечномерной ДС

Структурная устойчивость ДС (Андронов и Понтрягин, 1937) -

ее фазового
изменениям

ДС, которое
поведения

ости ДС

ловия
сть грубых

онной
еория,

торы,

понятие псевдогиперболичности

Исследование структурной устойчивости кардинально
усложняется с ростом размерности ДС

Случайные (стохастические) динамические системы и их бифуркации

Конечномерное описание ДС с бесконечным числом степеней свободы (формализм Мори-Цванцига): моделируется относительно небольшое число степеней свободы (relevant), остальные степени свободы (unresolved) трактуются как «шум»

Случайная ДС – «детерминированная ДС, возмущаемая шумом»:

$$(M, \varphi^t(\omega))$$

M - фазовое пространство

$(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$ - вероятностное пространство

$\begin{cases} \varphi^t(\omega) : \Omega \times M \rightarrow M \\ \theta^t : \Omega \rightarrow \Omega \end{cases}$ - оператор эволюции

Задание случайных ДС в виде стохастических ДУ:

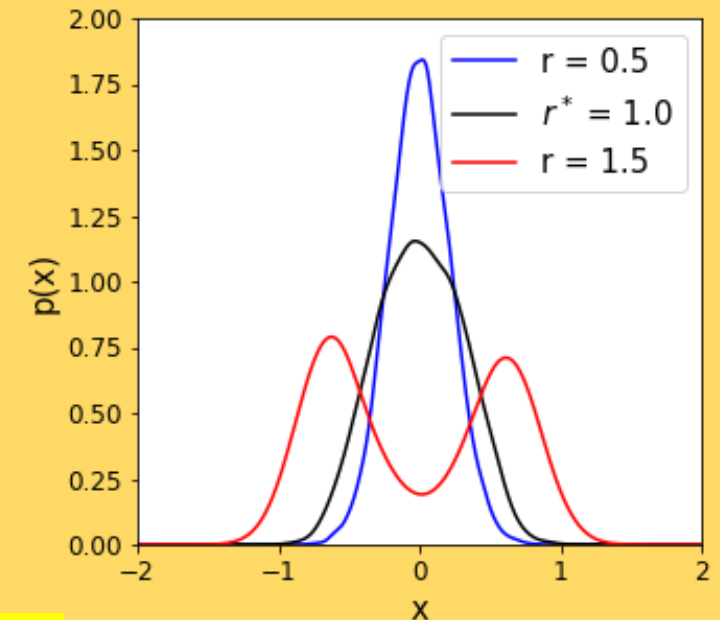
$$\frac{d\varphi^t(\omega)x}{dt} = F(\varphi^t(\omega)x, \theta^t\omega)$$

Бифуркации случайных ДС

- Динамическая бифуркация (D - бифуркация) - изменение характера устойчивости фазовых траекторий на *случайном аттракторе* (смена знака ляпуновского показателя)
- Феноменологическая бифуркация (P - бифуркация) качественное изменение стационарной плотности распределения вероятностей в фазовом пространстве

Пример P - бифуркации:

$$x_{n+1} = rx_n - x_n^3 + \xi_n$$



Байесов подход к построению и анализу структурной устойчивости эмпирической стохастической модели

Общий вид эмпирической модели

Наблюдаемые данные

$$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$$

Фазовые переменные

$$\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d < D}$$

Стохастическая ДС

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{f}(\mathbf{y}_{n-L}, \dots, \mathbf{y}_{n-1}) + \hat{\mathbf{g}} \xi_n$$

 Relevant processes

 Unresolved processes

Нелинейная параметризация - нейронная сеть

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}_n) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \tanh(\omega_i \mathbf{z}_n + \gamma_i)$$

$$\mathbf{z}_n = (\mathbf{y}_{n-L}, \dots, \mathbf{y}_{n-1})$$

Обучение и оптимизация модели в рамках Байесова подхода

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{f}(\mathbf{y}_{n-L}, \dots, \mathbf{y}_{n-1}) + \hat{\mathbf{g}} \xi_n$$

μ_f – параметры детерминированной части

$\hat{\mathbf{g}}$ – параметры стохастической части

$\mathbf{H}_i = \{L, m\}$ – структурные параметры

Апостериорное распределение параметров модели (АРВ):

$$P(\mu_f, \hat{\mathbf{g}} | \mathbf{y}, \mathbf{H}_i) \propto P(\mathbf{y} | \mu_f, \hat{\mathbf{g}}, \mathbf{H}_i) \cdot P(\mu_f, \hat{\mathbf{g}} | \mathbf{H}_i)$$

Ценовая функция на структурные параметры модели (обоснованность):

$$P(\mathbf{y} | \mathbf{H}_i) = \int P(\mathbf{y} | \mu_f, \hat{\mathbf{g}}, \mathbf{H}_i) \cdot P(\mu_f, \hat{\mathbf{g}} | \mathbf{H}_i) d\mu_f d\hat{\mathbf{g}}$$

Байесов критерий оптимальности модели:

$$\Psi_{\mathbf{H}_i}(\mu_f, \hat{\mathbf{g}}) = -\ln[P(\mathbf{y} | \mu_f, \hat{\mathbf{g}}, \mathbf{H}_i) \cdot P(\mu_f, \hat{\mathbf{g}} | \mathbf{H}_i)],$$

$$L = -\ln P(\mathbf{y} | \mathbf{H}_i) = \Psi_{\mathbf{H}_i}(\bar{\mu}_f, \bar{\hat{\mathbf{g}}}) + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1}{2\pi} \nabla \nabla^T \Psi_{\mathbf{H}_i}(\bar{\mu}_f, \bar{\hat{\mathbf{g}}}) \right]$$

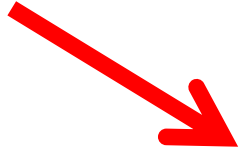
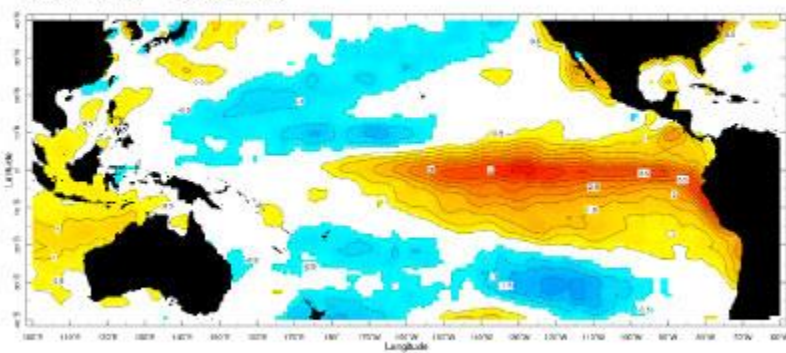
- Вместо единственной модели, соответствующей точечной оценке параметров, имеется статистический ансамбль моделей, соответствующий АРВ
- Структурная устойчивость понимается в вероятностном смысле по отношению к полученному статистическому ансамблю

Анализ структурной устойчивости колебания Эль-Ниньо по данным концептуальной модели

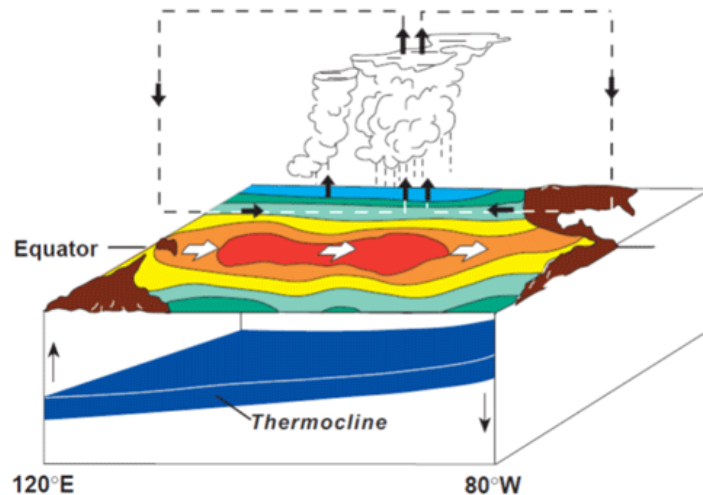
Эль-Ниньо - Южное колебание

Эль-Ниньо

El Niño Episode Sea Surface Temperatures
Departure from average in degrees Celsius
Dec 1982 - Feb 1983



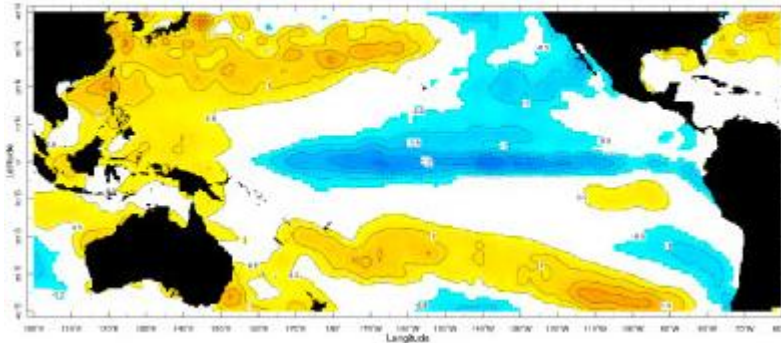
El Niño Conditions



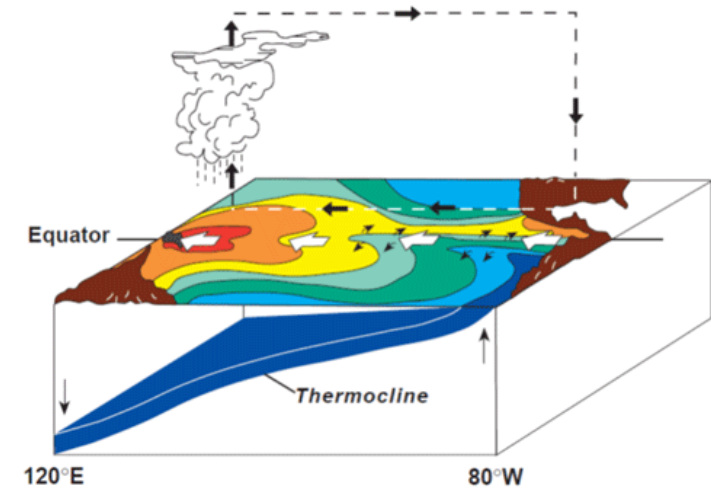
- Сильные аномалии (отклонения от климатического среднего) поверхностной температуры воды в центральной и восточной части тропического Тихого океана
- Сильные события случаются каждые 3-8 лет и продолжаются в течение одного года
- Пик аномалий поверхностной температуры, как правило, приходится на зимние месяцы

Ла-Нинья

La Niña Episode Sea Surface Temperatures
Departure from average in degrees Celsius
Dec 1998 - Feb 1999



La Niña Conditions



Концептуальная модель колебания Эль-Ниньо

An Equatorial Ocean Recharge Paradigm for ENSO. Part I: Conceptual Model

FEI-FEI JIN

Department of Meteorology, School of Ocean and Earth Science and Technology, University of Hawaii at Manoa, Honolulu, Hawaii

(Manuscript received 11 January 1995, in final form 3 September 1996)

$$\begin{cases} \frac{dT_E}{dt} = R(t)T_E + \omega_0 h_w + bT_E^2 - cT_E^3 + \sigma\xi \\ \frac{dh_w}{dt} = -r h_w - \omega_0 T_E \\ \frac{d\xi}{dt} = -m\xi + w(t) \end{cases}$$

T_E – аномалия температуры поверхности в восточной части тропического Тихого океана

h_w – аномалия глубины залегания термоклина в западной части тропического Тихого океана

ξ – атмосферный форсинг

Медленные процессы приспособления океана (баланс Свердруп):

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{48} \text{month}^{-1}$$

Сезонная модуляция связи океан-атмосфера (обратная связь Бьеркнеса):

$$\omega_a = \frac{2\pi}{12} \text{month}^{-1}$$

$$R(t) = R_0 - R_a \sin(\omega_a t)$$

Обратная связь Бьеркнеса (термоклин, апвеллинг, зональная адвекция):

$$R_0 - r = -\frac{1}{23} \text{month}^{-1}, r = \frac{1}{11.5} \text{month}^{-1}, R_a = \frac{1}{6.5} \text{month}^{-1}$$

Аномальная адвекция (нелинейный динамический нагрев):

$$b = \frac{1}{56.5} \text{month}^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}, c = \frac{1}{62.5} \text{month}^{-1} \cdot ^\circ C^{-2}$$

Быстрые процессы (атмосферный форсинг):

$$m = \frac{1}{1.5} \text{month}^{-1}, \sigma = \frac{1}{9} \text{month}^{-1},$$

- Система в отсутствии шума имеет положение равновесия типа фокус в точке

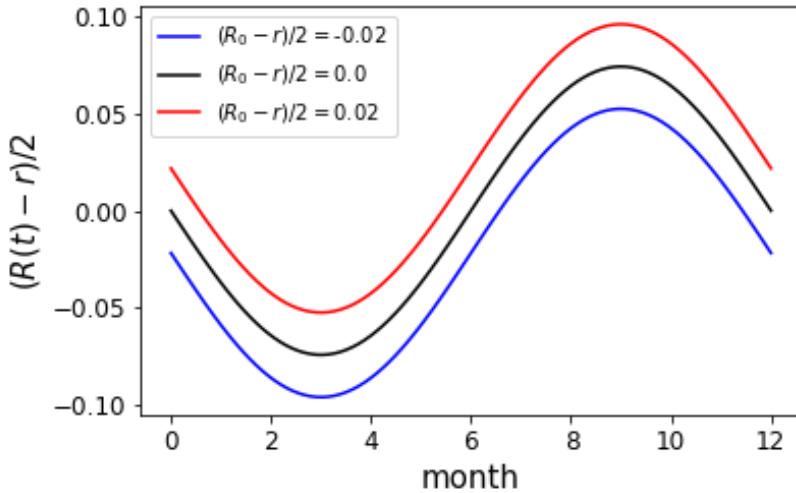
$(0, 0)$ с декрементом $\frac{R_0 - r}{2}$

- Из-за периодической модуляции параметра состояние равновесия может терять устойчивость вследствие бифуркации Андронова-Хопфа с мягким рождением предельного цикла

- Система допускает рассмотрение на секущей Пуанкаре с шагом 1 год

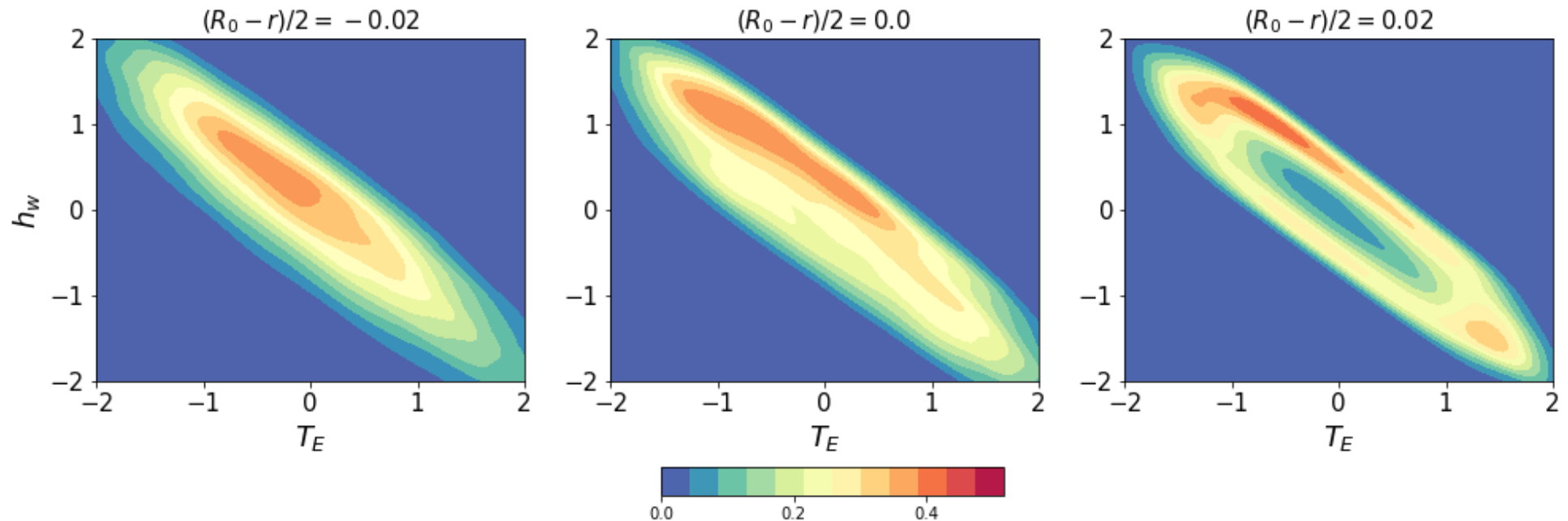
Динамика системы на секущей Пуанкаре

Сезонная модуляция связи океан-атмосфера
в зависимости от величины декремента в
начальный момент времени



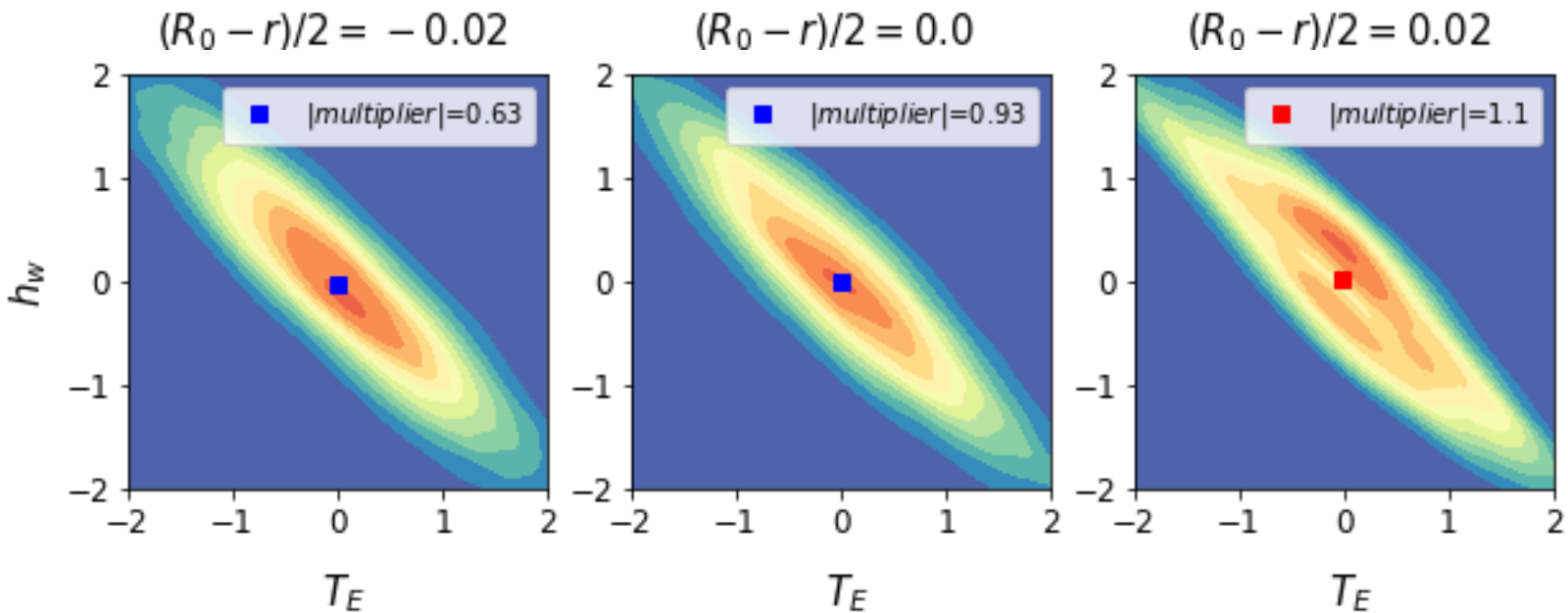
При изменении характера устойчивости системы в сечении Пуанкаре происходит **P-бифуркация**, связанная с качественным изменением структуры плотности распределения вероятностей в фазовом пространстве

Плотность распределения состояний в фазовом пространстве на секущей Пуанкаре с шагом 1 год



Динамика эмпирической модели

Плотность распределения состояний в фазовом пространстве эмпирической модели с шагом 1 год



Длина обучающей выборки данных $N = 1000$ лет

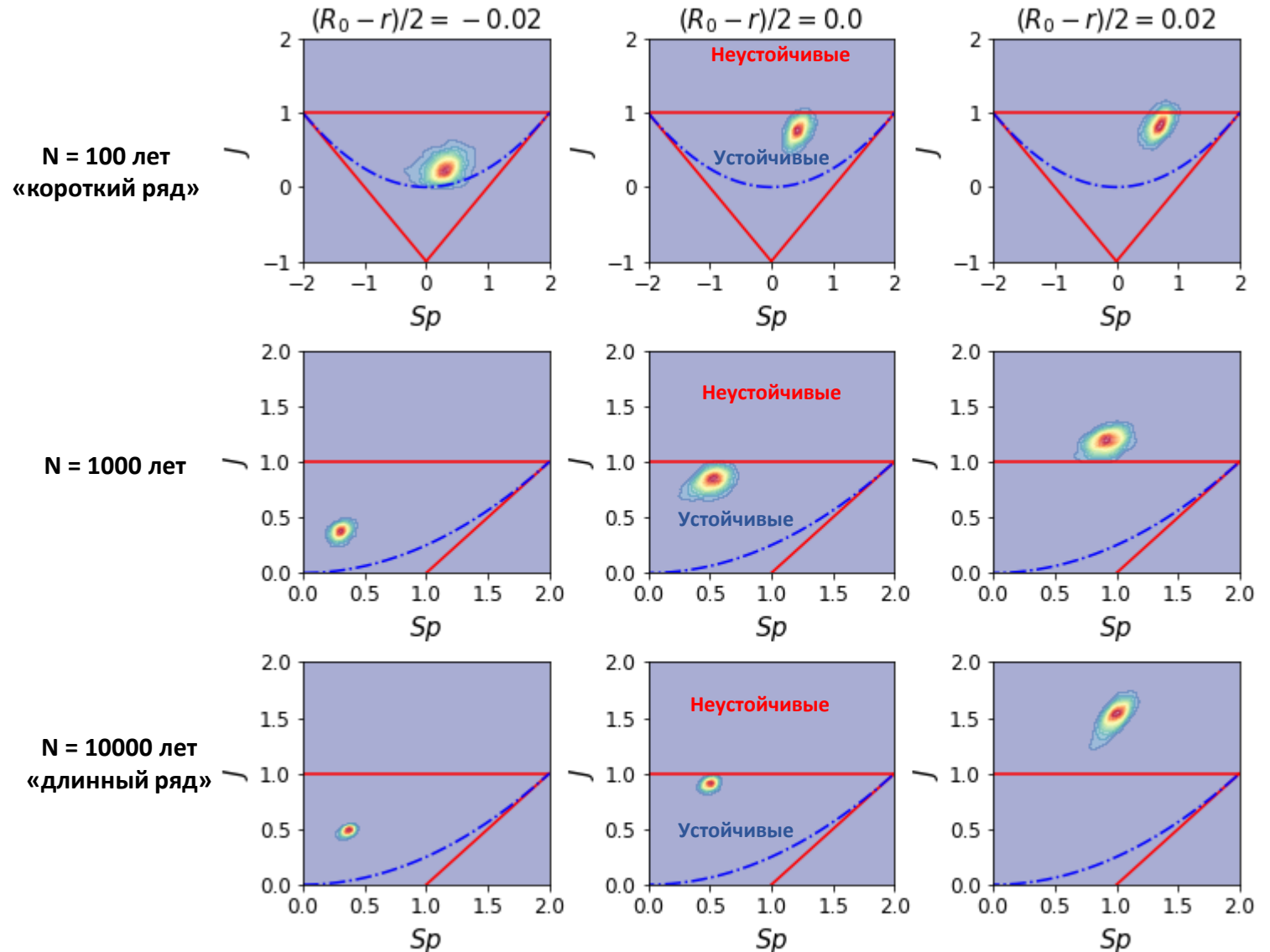
- Эмпирическая модель качественно воспроизводит динамику системы в зависимости от характера ее устойчивости
- Детерминированная часть модели имеет состояние равновесия типа **фокус** в окрестности точки $(0, 0)$, которое теряет устойчивость с ростом неустойчивости системы

Структурная устойчивость эмпирической модели

Бифуркационная диаграмма состояний равновесия
(плоскости определитель-след матрицы линеаризации
модели в состоянии равновесия)

- С увеличением неустойчивости системы в эмпирической модели увеличивается вероятность бифуркации (Неймарка-Сакера), связанная с потерей устойчивости состояния равновесия в точке $(0, 0)$

- Разброс параметров эмпирической модели уменьшается с увеличением длины обучающей выборки данных



Анализ структурной устойчивости колебания Эль-Ниньо по реальным данным наблюдений

Главные моды изменчивости колебания Эль-Ниньо

ЭОФ-разложение месячных данных аномалий теплосодержания верхнего (0-300 м) слоя тропического Тихого океана (1960-2022)

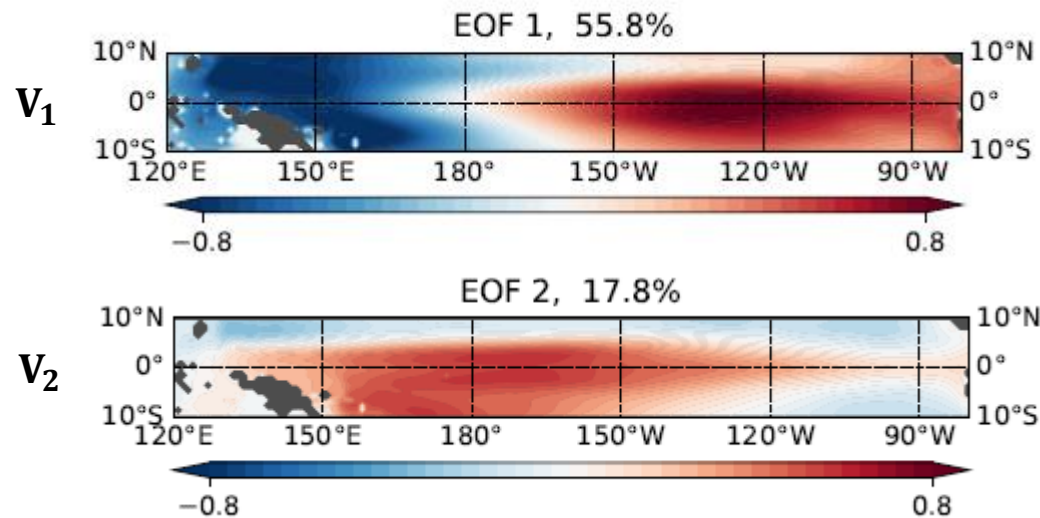
$$x_n = V_1 \cdot p_{1,n} + V_2 \cdot p_{2,n} + r_n$$

Пространственный вектор аномалий теплосодержания в момент времени n

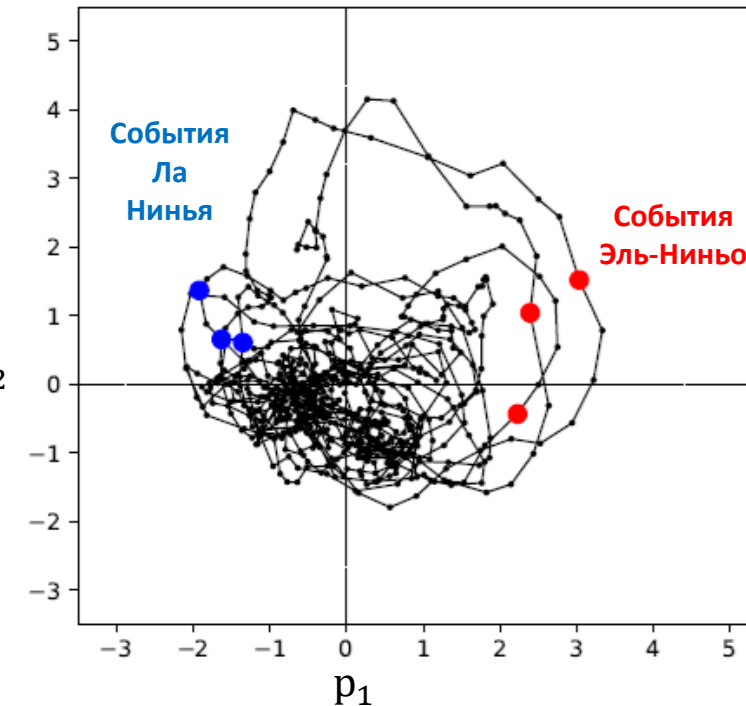
Две ведущих ЭОФ

Вектор остатков

Пространственные распределения двух ведущих мод (ЭОФ)



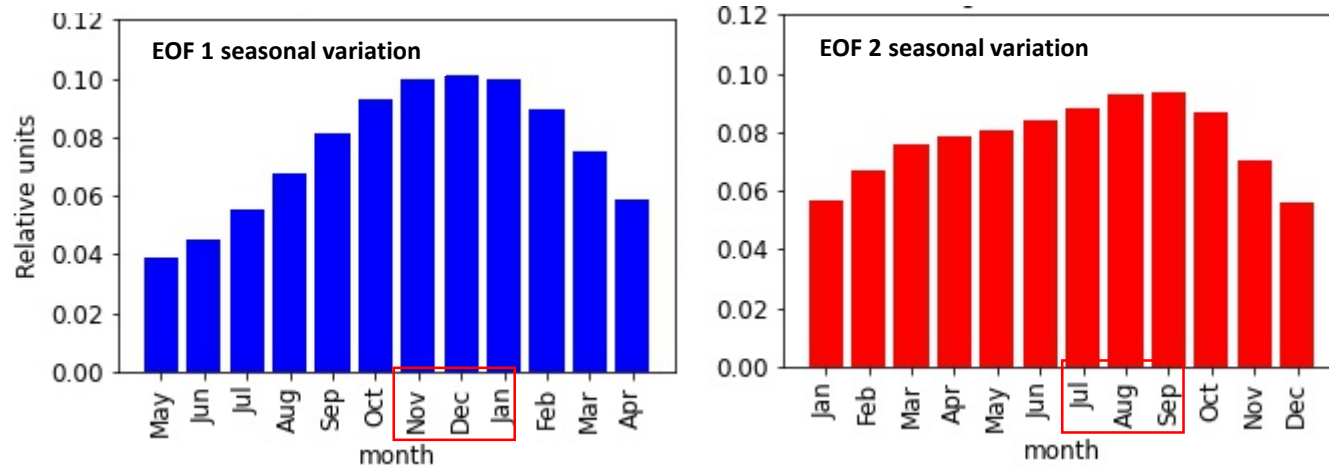
p_2



Фазовый портрет в пространстве временных рядов главных ЭОФ

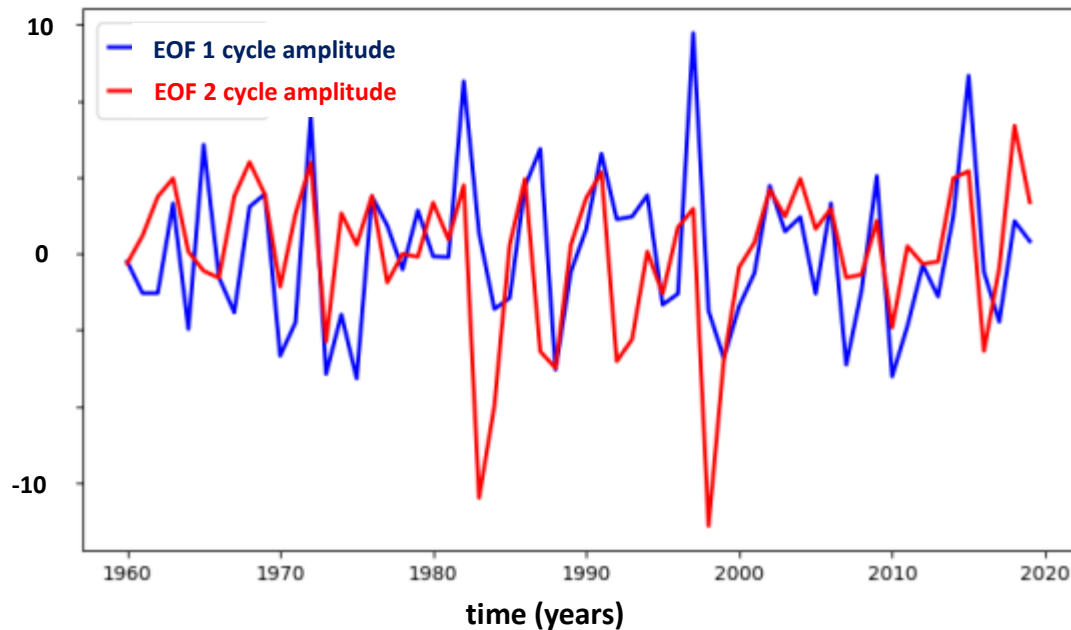
Динамика системы на текущей Пуанкаре

Сезонные циклы главных мод

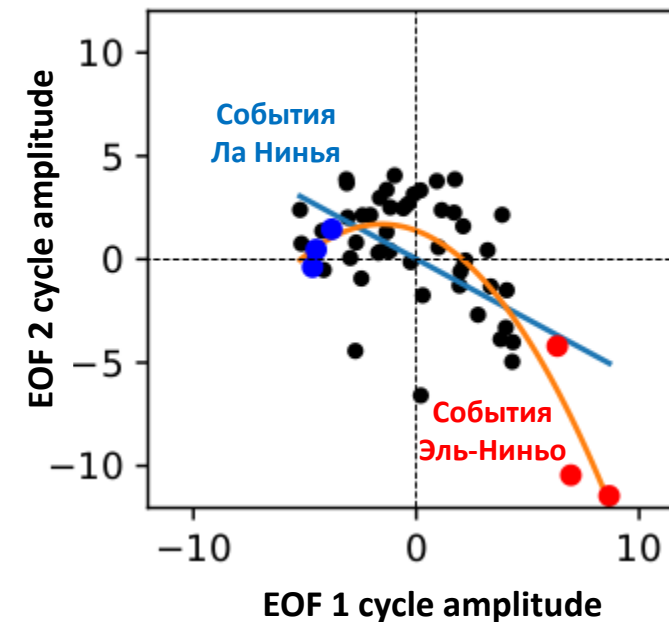


В сечении Пуанкаре прослеживается
нелинейный характер динамики
Эль-Ниньо

Временные ряды на текущей Пуанкаре



Фазовый портрет в сечении
Пуанкаре

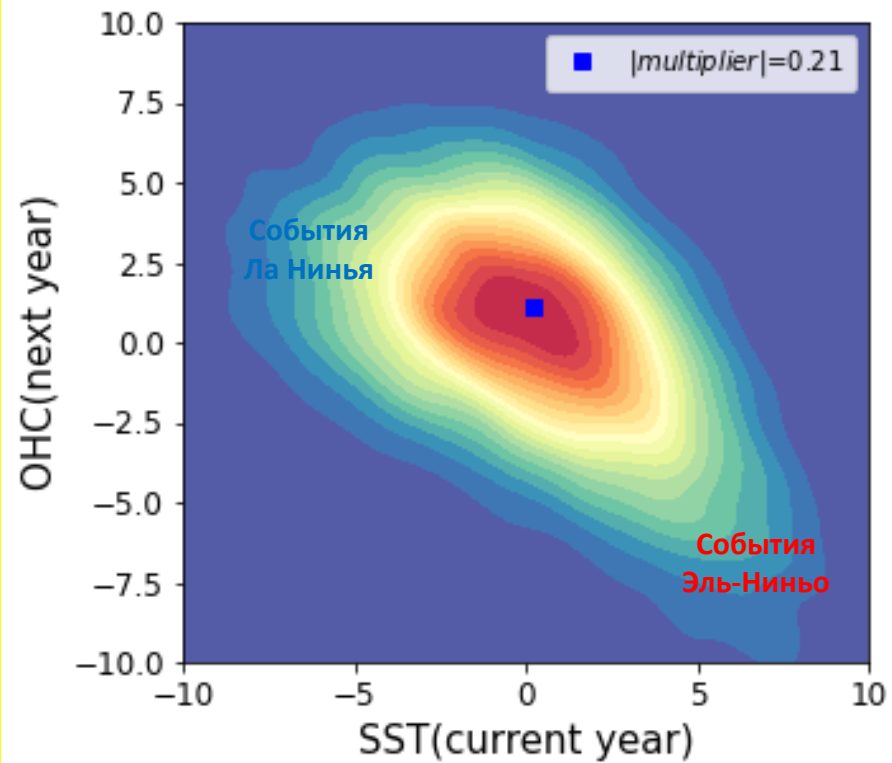


N = 62 года
«короткий ряд»

Динамика и структурная устойчивость эмпирической модели

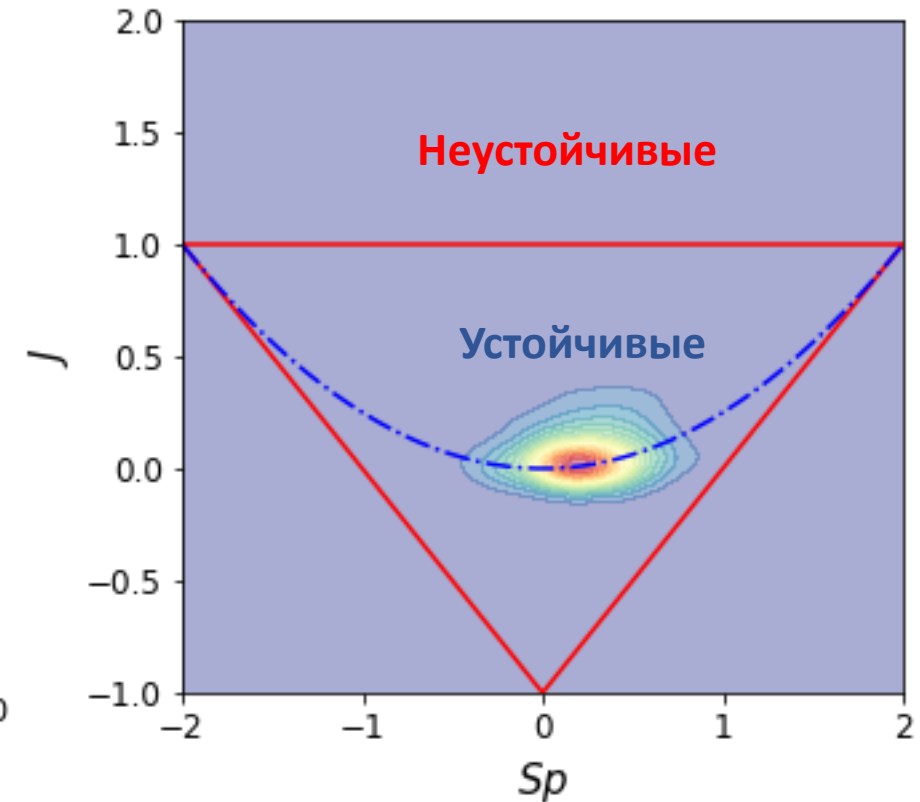
- Эмпирическая модель качественно воспроизводит динамику системы
- Детерминированная часть модели имеет состояние равновесия типа **устойчивый фокус** в окрестности точки $(0, 0)$
- Критический переход в системе, связанный с потерей устойчивости состояния равновесия, маловероятен

Плотность распределения состояний в фазовом пространстве эмпирической модели с шагом 1 год



Бифуркационная диаграмма состояний равновесия

(плоскость определитель-след матрицы линеаризации модели в состоянии равновесия)



Основные выводы:

- 1. Структурная устойчивость сложных систем может исследоваться на основе соответствующих низкоразмерных эмпирических моделей, построенных с учетом физических представлений об устойчиве этих систем**
- 2. Структурную устойчивость системы естественно понимать в вероятностном смысле через апостериорное распределение параметров эмпирической модели**
- 3. Важной и перспективной задачей является исследование структурной устойчивости (**tipping points**) Эль-Ниньо и других мод климата как по реальным данным наблюдений, так и по выходным данным глобальных моделей Земной системы в зависимости от внешних воздействий и параметризаций подсеточных процессов**

Спасибо!

Data and preprocessing

*Cheng L, Trenberth KE, Fasullo J, Boyer T, Abraham J, Zhu J (2017) Improved estimates of ocean heat content from 1960 to 2015. Science Adv 3(3). <https://doi.org/10.1126/sciadv.1601545>. <https://advances.sciencemag.org/content/3/3/e1601545>

Ocean heat content data:

- The monthly OHC data are provided by the Institute of Atmospheric Physics Chinese Academy of Sciences
- Spatial resolution is $1^\circ \times 1^\circ$ (3220 grid point in the considered equatorial Pacific region)
- 0-300 meters depth layer

$$H = c_p \int_{h_2}^{h_1} \rho(z) T(z) dz \quad (\text{J} \cdot \text{m}^{-2}).$$

Region 10S-10N, 120E-80W (equatorial Pacific region)

Time interval January 1960 - December 2020 (N=732 month)

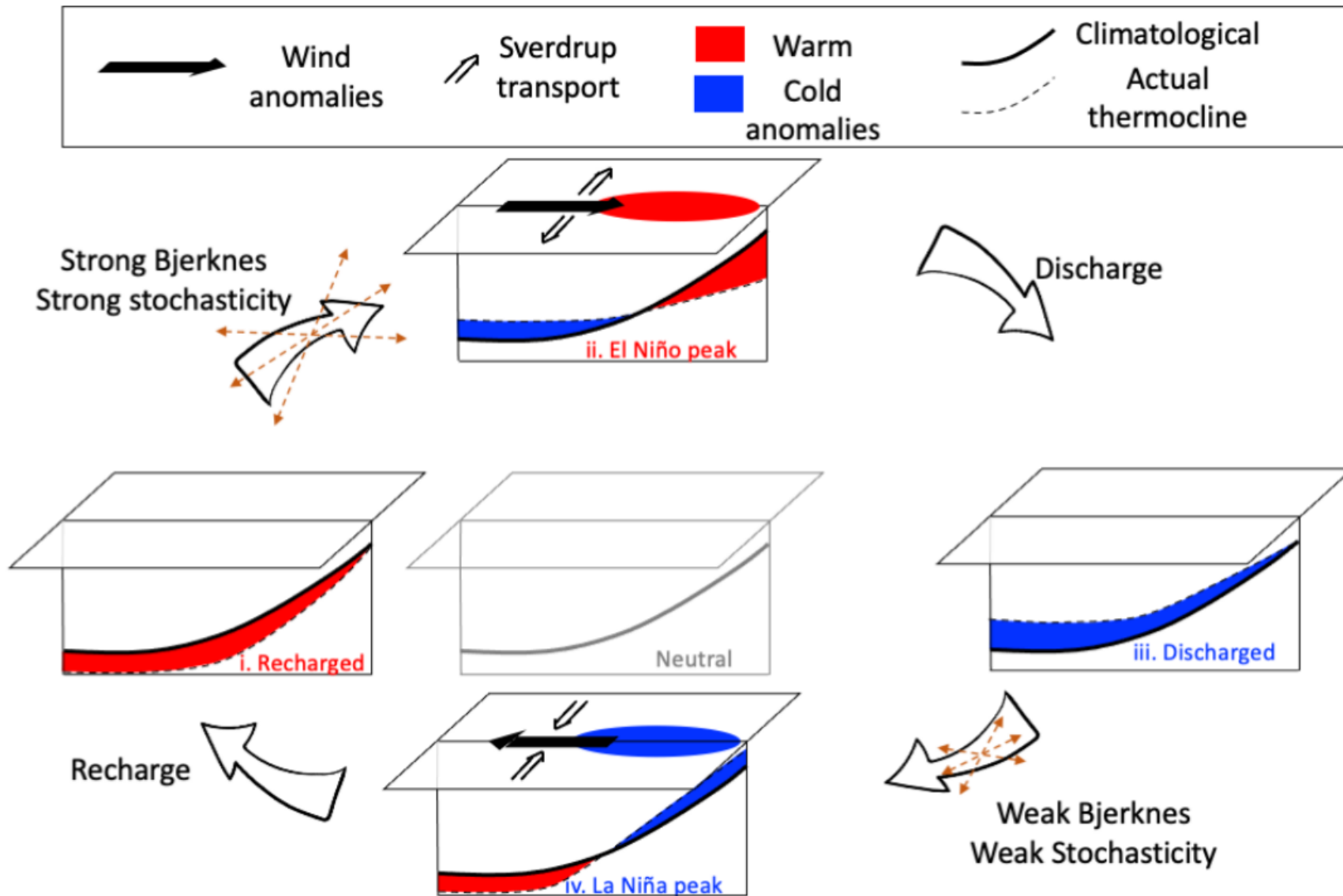
- The anomalies are obtained by subtracting the monthly climatology within the 1960–2014 interval.
- The long-term forcing is subtracted from the obtained OHC anomalies data in different ways. For the reanalysis data, we suppose the forcing to be associated with the long-term warming (caused, presumably, by increasing concentrations of atmospheric greenhouse gases) and remove it by subtracting linear regression on the CO2 trend in each grid point.
- For the model data, an ensemble of simulations generated from different initial conditions (but similar external forcings) is available. We apply an objective filtering method based on data decomposition into a subset of modes that are characterized by high signal-to-noise ratio (S/NP modes)*. The estimated forced signal consists of the ensemble-mean time series, corresponding leading S/NP modes, and is subtracted from each sample of the raw data.

Основные результаты

1. Предложен подход к анализу структурной устойчивости сложных (высокоразмерных, пространственно распределенных) систем
2. В рамках подхода структурная устойчивость системы понимается в вероятностном смысле через апостериорное распределение параметров соответствующей эмпирической стохастической модели
3. Эффективность подхода продемонстрирована на примере анализа структурной устойчивости колебания Эль-Ниньо по данным концептуальной модели
4. Анализ структурной устойчивости колебания Эль-Ниньо по реальным данным наблюдений указывает на малую вероятность критического перехода в системе
5. Важной и перспективной задачей является исследование структурной устойчивости (**tipping points**) Эль-Ниньо и других мод климата по выходным данным глобальных моделей Земной системы в зависимости от внешних воздействий и параметризаций подсеточных процессов

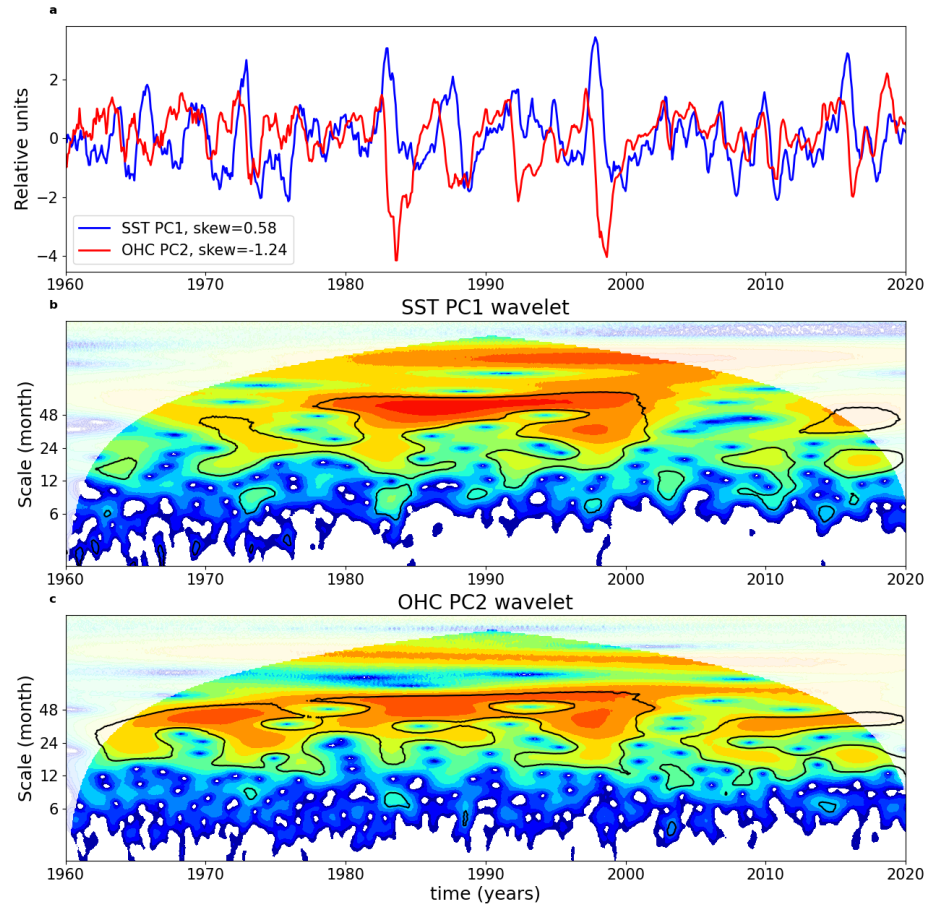
Спасибо!

The RO mechanism for ENSO phase transitions

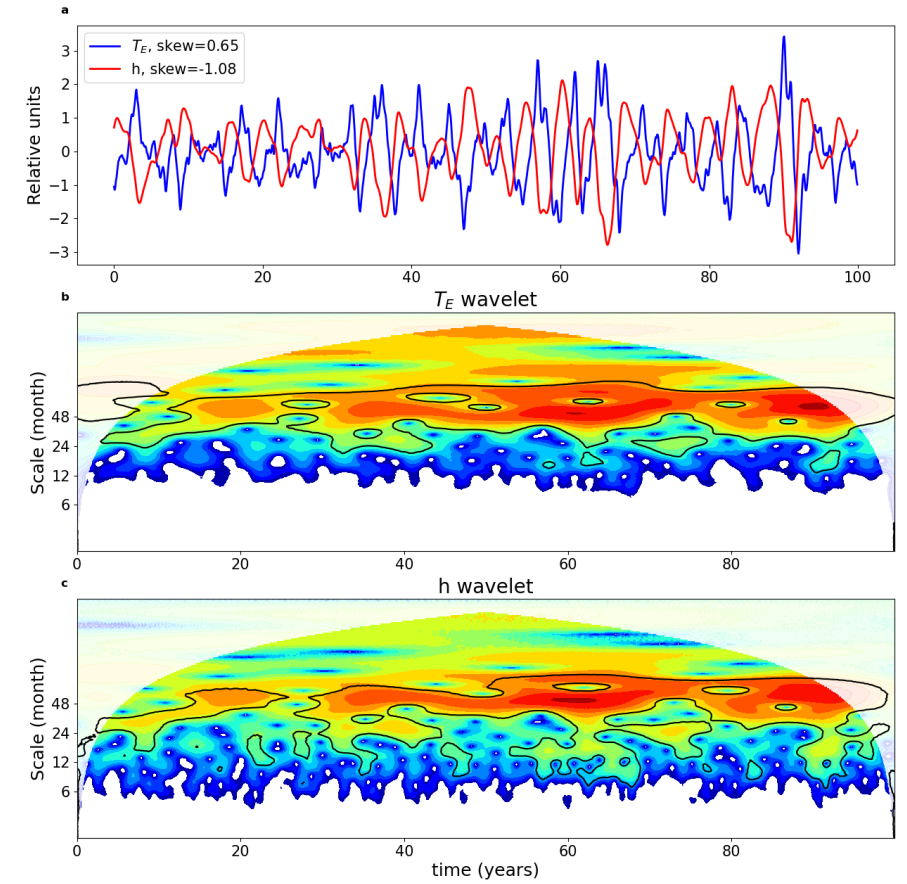


Концептуальная модель колебания Эль-Ниньо

Данные

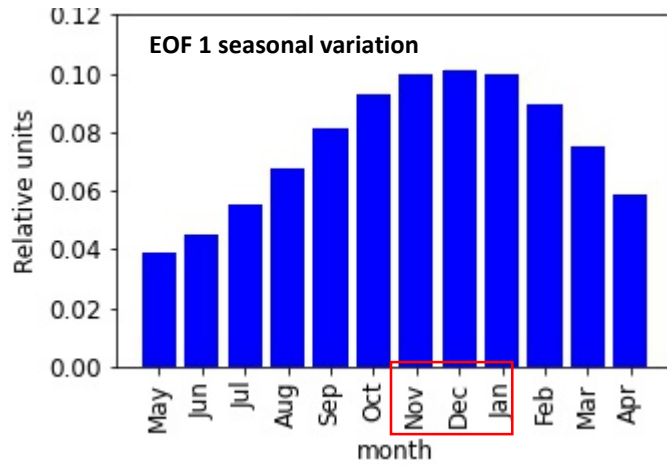


Модель



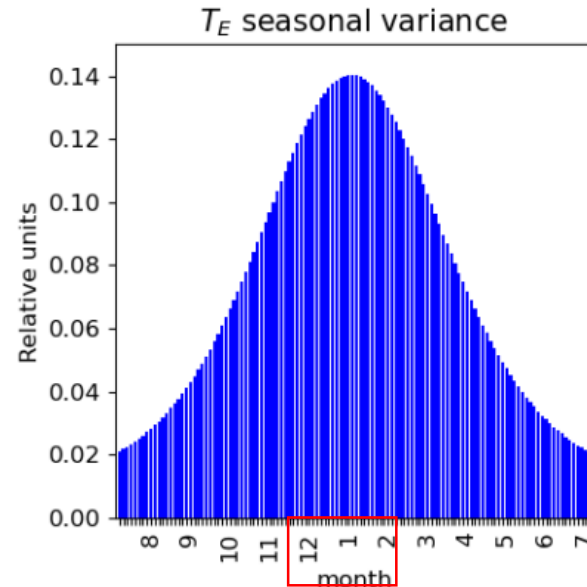
ENSO seasonal cycle

Observations



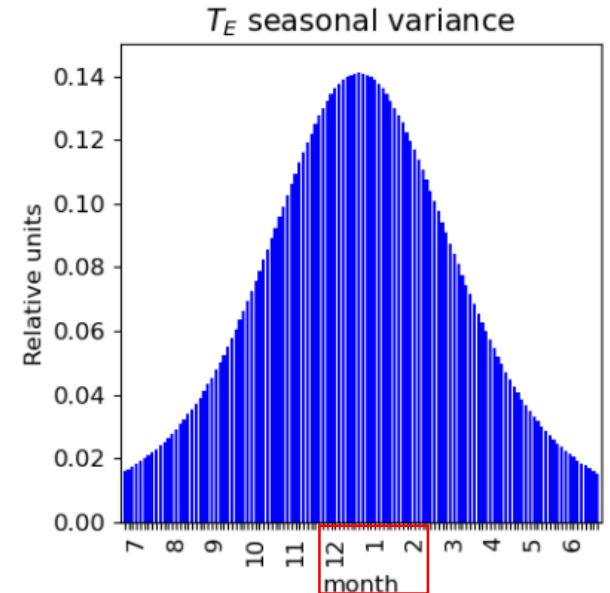
Model (deterministic asymmetry of ENSO)

$$bT_E^2 - cT_E^2 + \sigma(1 + BH(T_E)T_E)\xi$$



Model (stochastic asymmetry of ENSO)

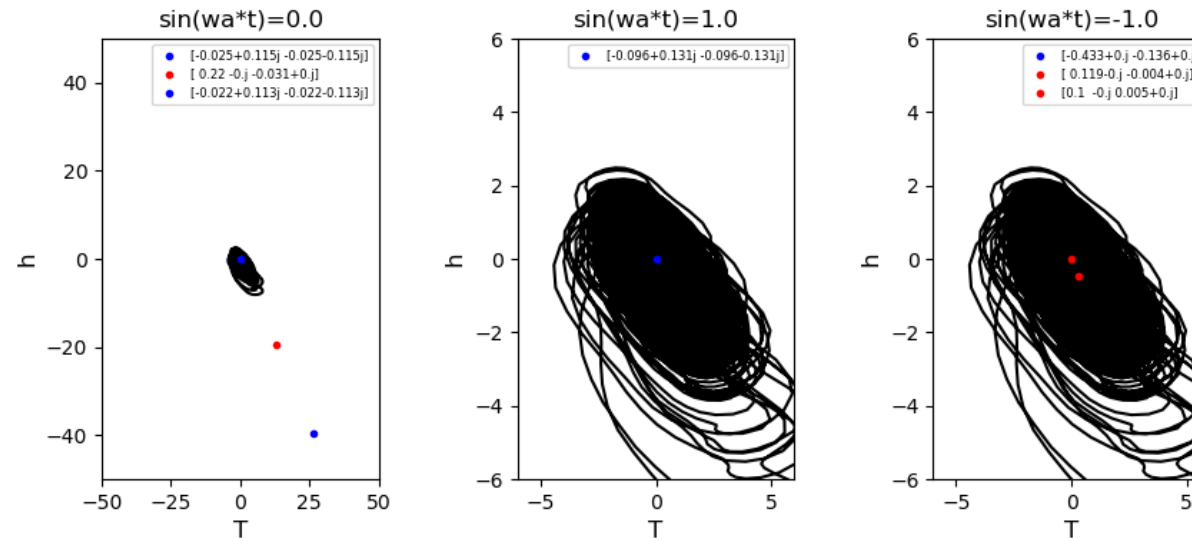
$$bT_E^2 - cT_E^3 + \sigma(1 + BH(T_E)T_E)\xi$$



Phase portret of RO

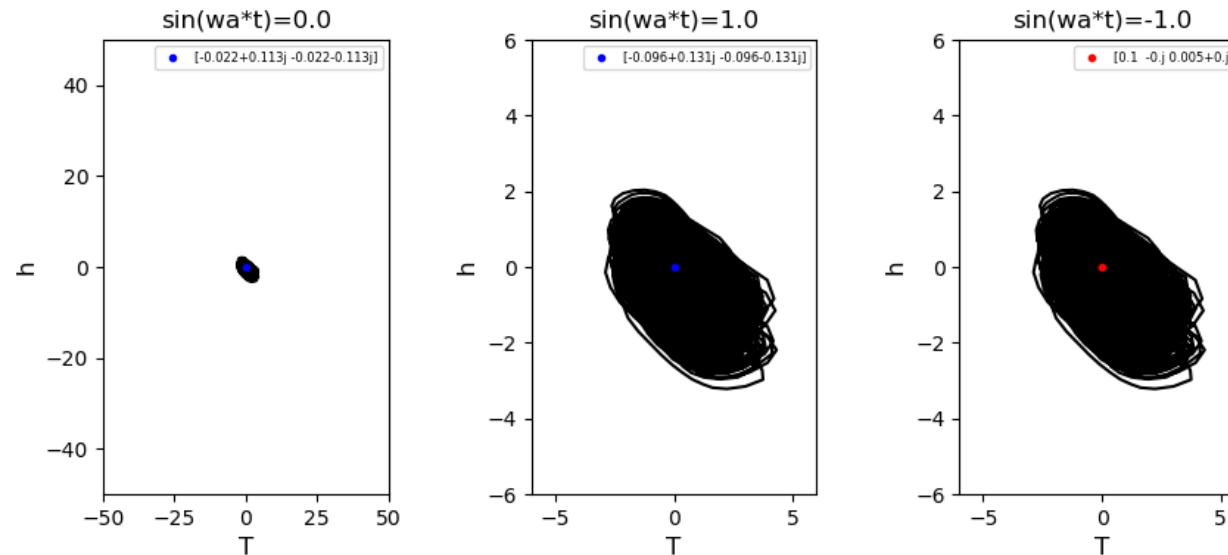
$$bT_E^2 - cT_E^2 + \sigma(1 + BH(T_E)T_E)\xi$$

Model (deterministic asymmetry of ENSO)



$$bT_E^2 - cT_E^3 + \sigma(1 + BH(T_E)T_E)\xi$$

Model (stochastic asymmetry of ENSO)



Improved estimates of ocean heat content from 1960 to 2015

LIJING CHENG, KEVIN E. TRENBERTH, JOHN FASULLO, TIM BOYER, JOHN ABRAHAM, AND JIANG ZHU [Authors Info & Affiliations](#)

SCIENCE ADVANCES • 10 Mar 2017 • Vol 3, Issue 3 • DOI: 10.1126/sciadv.1601545

2 125 211

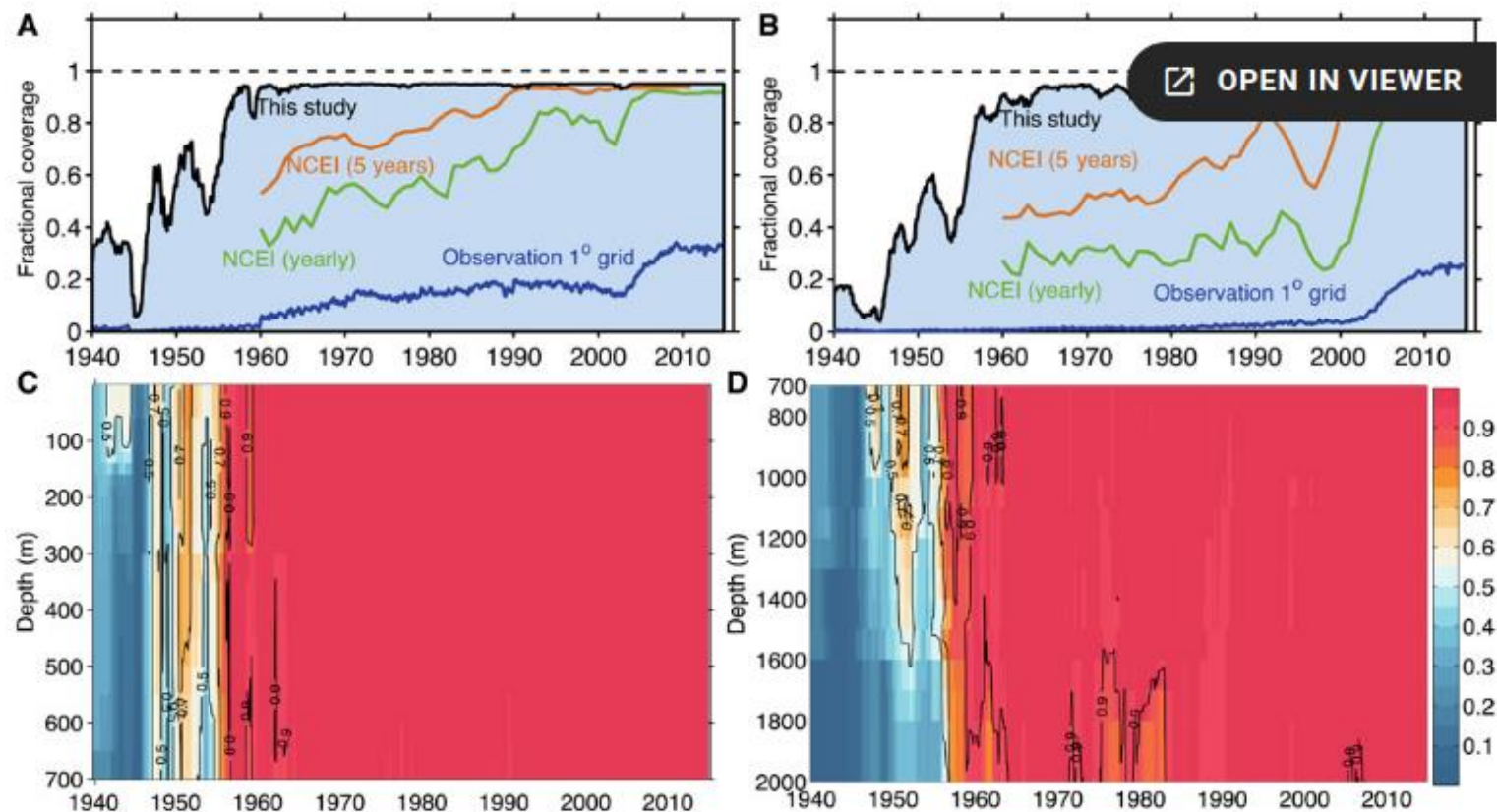
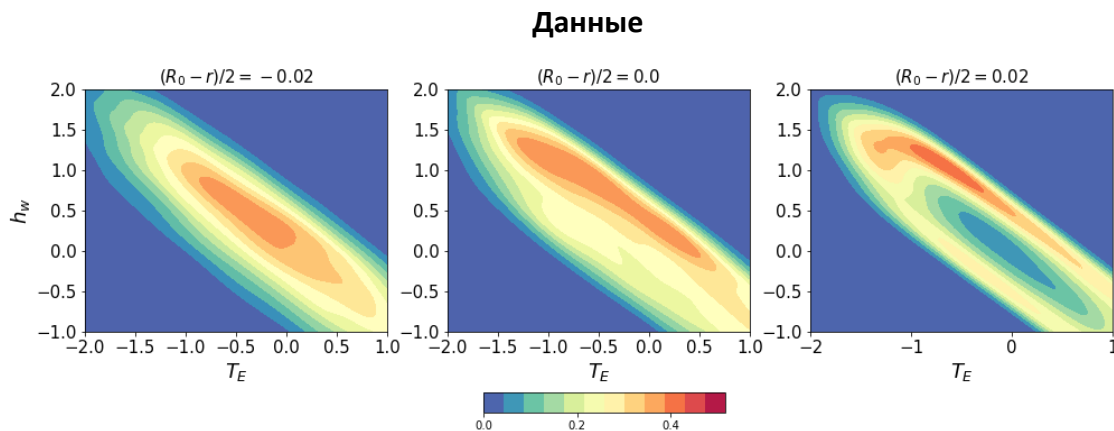
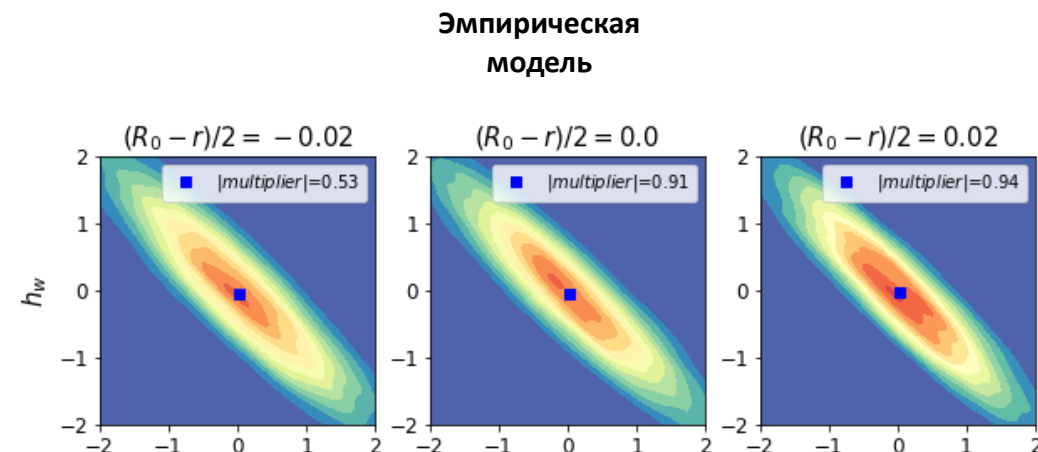


FIG. 1 Fractional coverage of the mapping method used in this study. **(A)** Averaged fraction (0 to 700 m) of the global ocean considered sampled for temperature data in each month for this study. **(B)** Same as (A) but for 700 to 2000 m. The mean fractional coverage of observations is shown in blue if the global ocean is divided into 1°-by-1° grids, and fractional coverage for NCEI yearly and the 5-year method is shown in green and orange, respectively. This figure starts from 1940. **(C)** Fractional coverage of the global ocean for layers within 0 to 700 m. **(D)** Same as (C) but for 700 to 2000 m.

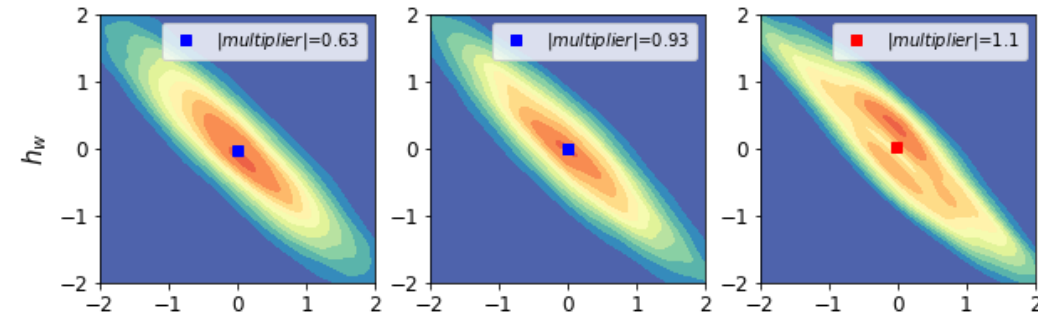
Динамика эмпирической модели



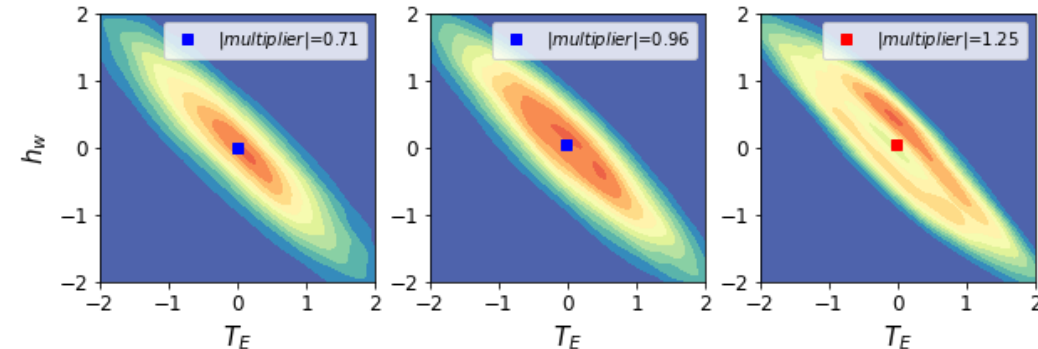
N = 100 лет



N = 1000 лет



N = 10000 лет



Measuring Global Ocean Heat Content to Estimate the Earth Energy Imbalance

 Benoit Meyssignac^{1*},  Tim Boyer²,  Zhongxiang Zhao³,  Maria Z. Hakuba^{4,5},  Felix W. Landerer⁴,  Detlef Stammer⁶,  Armin Köhl⁶,  Seiji Kato⁷,  Tristan L'Ecuyer⁸,  Michael Ablain⁹,  John Patrick Abraham¹⁰,  Alejandro Blazquez¹,  Anny Cazenave¹,  John A. Church¹¹,  Rebecca Cowley¹²,  Lijing Cheng¹³,  Catia M. Domingues^{14,15,16},  Donata Giglio¹⁷,  Viktor Gouretski¹⁸,  Masayoshi Ishii¹⁹,  Gregory C. Johnson²⁰,  Rachel E. Killick²¹,  David Legler²²,  William Llovel¹,  John Lyman^{20,23},  Matthew Dudley Palmer²¹,  Steve Piotrowicz²²,  Sarah G. Purkey²⁴,  Dean Roemmich¹⁷,  Rémy Roca¹,  Abhishek Savita^{14,16},  Karina von Schuckmann²⁵,  Sabrina Speich²⁶,  Graeme Stephens⁴,  Gongjie Wang²⁷,  Susan Elisabeth Wijffels²⁸ and  Nathalie Zilberman¹⁷

